THEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN AN ROTATIONSSYMMETRISCHEN STRAHLERZEUGUNGSSYSTEMEN MIT FELDEMISSIONSQUELLE

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
DIETER KERN
aus Reutlingen

1978

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536520_0014

THEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN AN ROTATIONSSYMMETRISCHEN STRAHLERZEUGUNGSSYSTEMEN MIT FELDEMISSIONSQUELLE

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
DIETER KERN
aus Reutlingen

1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Februar 1978

Dekan: Prof. Dr. E. Schmid

1. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Lenz

2. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Kasper

Inhalt

		Seite
1.	Einleitung	1
2.	Überblick über frühere Untersuchungen	2
2.1	Untersuchungen zur Deutung der Feld-Elektronenemission	2
2.2	Untersuchungen an Strahlerzeugungssystemen mit Feldemissionsquelle	6
3.	Potentialberechnung in rotationssymmetrischen Systemen mit feiner Spitze auf der Achse	10
3.1	Analytische Lösung der Laplace-Gleichung in der Umgebung einer feinen Spitze	10
3.2	Numerische Lösung der Laplace-Gleichung	21
3.3	Kombination von analytischer und numerischer Lösung	31
3.4	Bestimmung des Potentials und seiner Ableitungen in einem beliebigen Punkt des Lösungsgebiets	36
4.	Modell einer klassischen Energie- und Richtungsverteilung der austretenden Elektronen bei Feldemission	41
5.	Untersuchung eines Diodensystems	45
5.1	Berechnung der Potentialverteilung	45
5.2	Feldstärke an der Spitzenoberfläche	52
5.3	Bahnberechnung	55

		Seite
6.	Untersuchung eines Triodensystems	63
6.1	Berechnung der Potentialverteilung	63
6.2	Kardinalelemente und Fehlerkoeffizienten des Beschleunigungssystems	65
6.3	Bahnrechnungen im Gesamtsystem	76
7.	Zusammenfassung	84
Literatur		86
Anhang I		A1
Anhang II		A5

1. Einleitung

Ein Hauptproblem der Elektronenoptik besteht darin, möglichst kleine Sonden bzw. möglichst parallele Bündel hoher Stromdichte zu erzeugen, ersteres für die Rastermikroskopie und die Elektronenstrahlmikroaufzeichnung, letzteres für die Durchstrahlungsmikroskopie, für Beugungszwecke und für die Elektroneninterferometrie. Wegen ihres hohen Richtstrahlwerts von $R = 10^9$ A/cm^{2}sr (Speidel und Kurz (1977)) und der geringen Energiebreite bieten sich daher Feldemissionskathoden als Elektronenquellen an. Auch zur Erzeugung von Ionensonden hoher Stromdichte werden in letzter Zeit verstärkt Feldemissionsquellen eingesetzt (Levi-Setti (1974), Orloff und Swanson (1977), Schwarzer und Gaukler (1978)).

In der vorliegenden Arbeit soll ein Verfahren angegeben werden, das es erlaubt, die Eigenschaften eines rotationssymmetrischen Strahlerzeugungssystems mit Feldemissionsquelle zu berechnen. Bei Feld- und Bahnberechnung braucht nicht grundsätzlich zwischen Elektronen- und Ionenquelle unterschieden werden.

2. Überblick über frühere Untersuchungen

2.1 Untersuchungen zur Deutung der Feld-Elektronenemission

Die Erscheinung der Feldemission wurde von Wood (1897) zum erstenmal bewußt beobachtet und beschrieben. Trotz großer Bemühungen wurden dann in fast 20 Jahren kaum Fortschritte hinsichtlich ihrer Deutung erzielt, da alle klassischen Erklärungen dieses quantenmechanischen Effekts fehlschlagen mußten. Erst nach Entwicklung der Quantentheorie und der Sommerfeldschen Elektronentheorie der Metalle fanden Fowler und Nordheim (1928) eine theoretische Erklärung der Feldemission. Den Zusammenhang zwischen Emissionsstromdichte j, Feldstärke F an der Spitze und Austrittsarbeit ϕ_A im Grenzfall tiefer Temperaturen bezeichnet man als Fowler-Nordheim-Gleichung:

$$j = \frac{e^3 F^2}{8\pi h \phi_A t^2(y)} \cdot \exp\left[-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar e} \cdot \frac{\phi_A^{3/2}}{F} \cdot v(y)\right] \qquad (2-1)$$

mit $$y = \sqrt{\frac{e^3 F}{4\pi\varepsilon_0}} \Big/ \phi_A \quad .$$

Dabei ist e die Elementarladung, m die Elektronenmasse, h das Plancksche Wirkungsquantum, ε_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums,

$$v(y) = \sqrt{1+y} \cdot (E(k) - y\,K(k)) \quad ,$$

mit $$k^2 = \frac{1-y}{1+y} \quad , \qquad (2-2)$$

$$t(y) = \sqrt{1+y} \cdot \left(E(k) - \frac{y}{1+y} K(k)\right) \quad .$$

K(k) und E(k) sind die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art. Für das gemeinsame Argument y der Funktionen t und v kommen praktisch nur Werte $0 < y < 1$ in Frage. Die Funktion t(y) variiert in diesem Bereich zwischen 1 und 1.11, während v(y) mit zunehmendem y, d.h. zunehmender Feldstärke von 1 auf 0 monoton abnimmt. t(y) und v(y) sind z.B. bei Good und Müller (1956) tabuliert.

Offensichtlich hängt die Emissionsstromdichte stark von der Feldstärke an der Emitteroberfläche ab. Deren genaue Kenntnis ist daher für einen quantitativen Test der Theorie unerläßlich. Bei ihrer Berechnung ist man auf analytische oder numerische Lösungen der Laplace-Gleichung angewiesen. Analytische Lösungen existieren nur für spezielle Elektrodenkonfigurationen.

Nimmt man beispielsweise die Spitzenoberfläche als Rotationshyperboloid an, so kann die Laplace-Gleichung in gestreckten elliptischen Koordinaten separiert werden (vgl. 3.1). Für die Feldstärke am Scheitel eines Hyperboloids mit Krümmungsradius r_s im Abstand $d \gg r_s$ von einer ebenen Anode erhält man

$$F = \frac{2U}{r_s \ln(4d/r_s)} \qquad (2 - 3)$$

wenn U die Spannung zwischen Spitze und Anode ist. Diese Abschätzung wurde von Müller (1938) und Haefner (1940) benutzt.

Um eine bessere Approximation für die Spitzenform zu erhalten, haben Drechsler und Henkel (1954) der Lösung der Laplace-Gleichung in elliptischen Koordinaten noch die Potentialverteilung im Außenraum einer Kugel überlagert. Die Kugel hat dabei denselben Krümmungsradius und -mittelpunkt wie das Rotationshyperboloid. Für die Feldstärke am Scheitel der Spitze erhalten sie dann mit obigen Bezeichnungen:

$$F = (1-c)\, F_{Hyp} + c\, F_{Kugel} = \left(\frac{2(1-c)}{r_s \ln(4d/r_s)} + \frac{c}{r_s} \right) \cdot U \quad . \qquad (2 - 4)$$

c $(0 \leq c \leq 1)$ dient dabei als "Formfaktor".

Unbefriedigend an dieser Linearkombination zweier Potentialfelder ist, daß ihre Randbedingungen weder in einer Ebene $z = 0$ (wie für den ersten Summanden) noch im Unendlichen (wie für den zweiten Summanden) klar definiert sind.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Spitze durch ein Rotationsparaboloid zu approximieren und als Anode ebenfalls

ein konfokales Paraboloid zu benutzen. In diesem Fall erhält man für die Feldstärke im Scheitel der Spitze (vgl. 3.1)

$$F = \frac{2U}{r_s \ln(1+2d/r_s)} \approx \frac{2U}{r_s \ln(2d/r_s)} \quad . \qquad (2 - 5)$$

Diese Abschätzung wurde von Becker (1951) benutzt.

Schließlich kann man die Spitze durch eine der Äquipotentialflächen beschreiben, die man in der Nähe einer auf die Spitze eines Kegels aufgesetzten Kugel erhält (vgl. 3.1, Sphere on Orthogonal Cone-model, SOC-Modell). In diesem Fall kann man die Lösung der Laplace-Gleichung durch sphärische Polarkoordinaten ausdrücken. Dabei fordert man als Randbedingung konstantes Potential auf einem Kegel mit halbem Öffnungswinkel α, dessen Spitze im Ursprung liegt und auf einer Kugel mit Radius a um den Ursprung. Die sehr spezielle, von Dyke et al. (1953) und später von Wiesner (1970) zur Beschreibung von Spitzenkathoden verwandte Lösung erlaubt jedoch keine Anpassung an Randbedingungen auf anderen Elektroden.

Als Oberfläche des Emitters wählt man eine der Äquipotentialflächen, die in einigem Abstand von Kegel und Kugel verlaufen. Man hat bei diesem Modell also drei Parameter, um die Emitteroberfläche durch eine Äquipotentialfläche zu approximieren: den Kegelwinkel α, den Kugelradius a und die Potentialdifferenz zwischen der Äquipotentialfläche einerseits und Kegel und Kugel andererseits.

Für die Feldstärke am Scheitelpunkt einer Spitze, die von einer ebenfalls zur obigen Potentialflächenschar gehörenden Anode auf der Achse den Abstand $d \gg r$ hat, und an der die Spannung U liegt, erhält man

$$F = \frac{U}{r_0} \cdot \frac{1 + \nu + \nu\left(\frac{r_0}{a}\right)^{1+2\nu}}{\left[\left(\frac{d}{r_0}\right)^{\nu} - 1\right]\left(\frac{r_0}{a}\right)^{1+2\nu} + 1} \qquad (2 - 6)$$

Dabei ist ν so gewählt, daß $P_\nu(-\cos\alpha) = 0$, $0 < \nu < 1$ gilt. $P_\nu(x)$ ist dabei die Legendrefunktion 1. Art vom Grade ν (vgl. 3.1). $r_o > a$ ist der Abstand des Spitzenscheitels vom Kugelmittelpunkt und ist im Gegensatz zu einer von Wiesner (1970) geäußerten Vermutung nicht mit dem Krümmungsradius der Spitze identisch. Vielmehr gilt:

$$r_s = r_o \cdot \frac{2\left[1+\nu+\nu\left(\frac{r_o}{a}\right)^{1+2\nu}\right]}{(2+\nu)(1+\nu)+\nu(1-\nu)\left(\frac{r_o}{a}\right)^{1+2\nu}} \qquad (2-7)$$

In Tabelle 1 sind einige typische Werte für das Verhältnis r_s/r_o dargestellt:

Tabelle 1

r_o/a	ν	r_s/r_o
2	0.1	1.057
2	0.2	1.128
3	0.1	1.114
3	0.2	1.259

Dieses Feldmodell wurde vor allem von Dyke und Mitarbeitern seit 1953 verwendet, z.B. Dyke, Trolan, Dolan und Barnes (1953).

Die Arbeiten auf dem Gebiet der Feldemission bis zur Mitte der fünfziger Jahre sind in den Übersichtsartikeln von Good und Müller (1956) und Dyke und Dolan (1956) ausführlich dargestellt. Weitere Literaturangaben findet man bei Gadzuk und Plummer (1973).

2.2 Untersuchungen an Strahlerzeugungssystemen mit Feldemissionsquelle

Ziel der bisherigen Rechnungen war eine möglichst genaue Bestimmung der Feldstärke an der Emitteroberfläche. Zur Abschätzung des Auflösungsvermögens von Feldelektronenmikroskopen hat D. J. Rose (1956) Bahnen von Elektronen berechnet, die von der Spitze ausgingen. Er hat dabei eine paraboloidförmige Spitze und Anode angenommen, da in diesem Fall eine analytische Lösung der Bahngleichung für achsennahe Elektronenbahnen gelingt.

Vorschläge, eine feine Spitze bei Zimmertemperatur unter Feldemissionsbedingungen als Quelle eines Strahlerzeugungssystems zu verwenden, wurden schon von Marton (1954) und Pattee (1953) gemacht. Crewe und Mitarbeiter (1968) berichten über erste Erfahrungen mit einem derartigen Strahlerzeugungssystem und setzen es seither mit großem Erfolg in der Durchstrahlungsrastermikroskopie ein. Es handelt sich dabei um ein Triodensystem, d.h. es besteht aus der Spitze als Kathode und zwei Anoden. Zwischen Spitze und erster Anode liegt die Saugspannung U_s, mit der der Emissionsstrom geregelt wird, zwischen den beiden Anoden die Differenz U_b-U_s zwischen der Beschleunigungsspannung U_b und der Saugspannung. Die elektronenoptischen Eigenschaften des Systems hängen dann in nichtrelativistischer Näherung nur vom Verhältnis U_b/U_s ab (vgl. 6.2). Ein Nachteil des Systems besteht darin, daß bei einer Änderung von U_b bei konstantem U_s z.B. das Bild der Quelle wandert.

Kompliziertere Anordnungen, bei denen Emissionsstrom und Beschleunigungsspannung weitgehend unabhängig von den elektronenoptischen Eigenschaften des Systems geregelt werden können, werden z.B. von Veneklasen und Siegel (1972), Troyon, Kuo, Siegel (1973), Kuroda, Ebisui, Suzuki (1974), Troyon und Laberrigue (1977) angegeben. Allgemeine Betrachtungen über die Anforderungen an ein System je nach Verwendungszweck findet man bei Veneklasen (1972).

Die theoretischen Untersuchungen solcher Systeme gehen fast ausschließlich von der Annahme aus, daß man den beschleunigenden und fokussierenden Teil völlig getrennt von dem Bereich in der Umgebung der emittierenden Spitze behandeln kann. Diese Annahme scheint für viele Systeme berechtigt, bei denen die Spitze mit einem Krümmungsradius von etwa 100 nm einige Millimeter Abstand von der ersten Anode hat, die nur eine sehr enge Bohrung aufweist und somit die beiden Feldteile trennt.

Das Feld in der Umgebung der Spitze, auch Kathoden- oder Diodengebiet genannt, erzeugt eine virtuelle Quelle, die dann durch das nachfolgende Feld abgebildet wird (vgl. Abschnitt 6). Für eine kugelförmige Kathode mit Radius r und umgebendes sphärisches Feld, wie es Everhart (1967) benutzt, gibt schon E. Ruska (1933)

$$r_v = r \sqrt{\frac{U_t}{U}} \cos\vartheta \qquad (2 - 8)$$

als Radius r_v der virtuellen Quelle an, die sich in der Mittelebene der Kugel, senkrecht zur optischen Achse befindet. Dabei ist $e \cdot U_t = \frac{m}{2} v_t^2$ der Beitrag der Tangentialkomponente v_t der Anfangsgeschwindigkeit zur kinetischen Energie, U die Beschleunigungsspannung und ϑ der Öffnungswinkel des Kegels, den die emittierende Fläche mit dem Kugelmittelpunkt als Kegelspitze bildet.

Worster (1969) betrachtet eine paraboloidförmige Kathode mit dazu konfokaler Anode und bestimmt in dieser Anordnung durch analytische Berechnung achsennaher Elektronenbahnen Lage und Größe der virtuellen Quelle sowie den Einfluß des Öffnungsfehlers.

Wiesner und Everhart (1973 und 1974) benutzen zur Beschreibung der Verhältnisse im Diodengebiet das SOC-Modell nach Dyke, Trolan, Dolan und Barnes (1953). Sie lösen die Lorentzsche Bewegungsgleichung für von der Spitze ausgehende Elektronen

und bestimmen daraus Lage und Größe der virtuellen Quelle sowie den Einfluß des Öffnungs- und des Farbfehlers für verschiedene Spitzenradien und -formen.

Alle diese Untersuchungen ergeben, daß es möglich sein sollte, virtuelle Quellen mit einigen Nanometern Radius herzustellen. Von praktischer Bedeutung ist aber nur der Radius der vom nachfolgenden beschleunigenden und fokussierenden Teil des Systems erzeugten reellen oder virtuellen Quelle, der im wesentlichen von dessen Aberrationen bestimmt wird. Daher haben sich mehrere Autoren mit der Optimierung dieses Feldteils befaßt. Er wird dabei als abbildendes System aufgefaßt, dessen paraxiale Eigenschaften und Fehlerkoeffizienten untersucht werden (vgl. 6.2).

Im Fall eines Triodensystems handelt es sich dabei einfach um ein beschleunigendes Feld, das auf beiden Seiten in feldfreien Raum übergeht. Butler (1966) und Tonomura (1973) machen für den axialen Potentialverlauf einen Polynomansatz und bestimmen die Koeffizienten so, daß der Öffnungsfehlerkoeffizient 3. Ordnung minimal wird. Als Elektrodenoberflächen, die zur Erzeugung dieses Achsenpotentialverlaufs erforderlich sind, ergeben sich gekrümmte Flächen, deren Herstellung schwierig ist. Munro (1972) untersucht dagegen die Eigenschaften verschiedener Triodensysteme mit einfach herzustellenden Elektroden, indem er das Achsenpotential aus der Elektrodengeometrie und den angelegten Spannungen mit Hilfe der Finite-Element-Methode berechnet. Er findet dabei Systeme, die geringeren Öffnungs- und Farbfehler haben als z.B. das von Butler (1966) angegebene.

Um von der zu stark vereinfachenden Annahme loszukommen, daß das Kathodengebiet und der restliche Feldteil getrennt voneinander behandelt werden können, hat schon Everhart (1967) Bahnen in der Überlagerung eines sphärischen und eines hypothetischen Beschleunigungsfeldes berechnet. Wiesner (1970)

hat dem nach dem SOC-Modell dargestellten Spitzenfeld das Feld einer unendlich dünnen Lochblende zwischen asymptotisch homogenen Feldern überlagert und so ein Loch in der Anode simuliert. Er hat auch gezeigt, daß man auf diese Weise im Prinzip Mehranodensysteme behandeln kann. Allerdings wird man so kaum beliebige, im Experiment realisierte Anordnungen beschreiben können.

Schon Dyke und Trolan (1953) haben bemerkt, daß die Feldstärke an der Spitze von Elektroden in der Umgebung, z.B. von der die Spitze tragenden Haarnadel beeinflußt wird. Roth, Munch und Zeitler (1974) haben bei Variation des Abstandes d zwischen Spitze und ebener Anode in ihrem System sogar die beste Übereinstimmung mit der Fowler-Nordheim-Gleichung erzielt, wenn sie zur Feldstärkenberechnung die Spitze durch eine Kugel zwischen den Platten eines Kondensators beschreiben. Von der einen Platte hat die Kugel gerade den Abstand d, und sie liegt auf dem Potential der anderen Platte.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren angegeben, das gestattet, die Potentialverteilung in einem rotationssymmetrischen System mit feiner Spitze unter Berücksichtigung der vorgegebenen Randbedingungen auch auf anderen Elektroden zu berechnen. Durch Bahnberechnung in dieser Potentialverteilung können dann die elektronenoptischen Eigenschaften des Systems ermittelt werden. Die Methode wird auf ein Dioden- und ein Triodensystem angewandt.

3. Potentialberechnung in rotationssymmetrischen Systemen mit feiner Spitze auf der Achse

Dieser Abschnitt behandelt ein Verfahren zur Lösung der Laplace-Gleichung unter Berücksichtigung der durch die Elektroden des Systems vorgegebenen Randbedingungen. Eine analytische Lösung im gesamten System gelingt dabei im allgemeinen nicht. Bei einer numerischen Lösung im gesamten System treten dadurch Schwierigkeiten auf, daß sich die Abmessungen der Spitze von denen der übrigen Elektroden im allgemeinen um etwa vier bis fünf Zehnerpotenzen unterscheiden. Die hier entwickelte Methode beruht darauf, daß die Laplace-Gleichung in der Umgebung der Spitze analytisch, im restlichen Gebiet dagegen numerisch gelöst wird und beide Lösungen stetig differenzierbar aneinander angeschlossen werden.

3.1 Analytische Lösung der Laplace-Gleichung in der Umgebung einer feinen Spitze

Sinnvolle Randbedingungen für die Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi = 0 \qquad (3 - 1)$$

sind die Vorgabe von ϕ auf einem geschlossenen Rand (Dirichlet-Bedingung) oder die Vorgabe der Normalableitung von ϕ auf einem geschlossenen Rand (Neumann-Bedingung). Dabei kann der Rand teilweise oder ganz im Unendlichen verlaufen (vgl. Morse und Feshbach (1953)).

Im vorliegenden Fall kommt das Dirichlet-Problem in Frage, wobei der Rand einmal aus der Spitzenoberfläche, zum andern aus der Trennfläche zwischen den Gebieten mit analytischer und numerischer Lösung besteht. Geeignete Koordinaten für die analytische Lösung sind solche, in denen die Laplace-Gleichung

separiert und in denen die Randbedingungen zumindest auf der Spitzenoberfläche einfach zu erfüllen sind. Wie schon im zweiten Abschnitt beschrieben wurde, sind dies vor allem die sphärischen Polarkoordinaten, die auch bei der weiteren Rechnung verwendet werden, aber auch elliptische und parabolische Koordinaten.

a) Sphärische Polarkoordinaten

Die Transformationsbeziehungen zwischen Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z und sphärischen Polarkoordinaten r, ϑ, ψ lauten

$$\begin{aligned} \varrho &= r \sin\vartheta \quad , & 0 \leq r < \infty \\ \varphi &= \psi \quad , & 0 \leq \psi < 2\pi \\ z &= r \cos\vartheta \quad , & 0 \leq \vartheta \leq \pi \end{aligned} \qquad (3-2)$$

In diesen Koordinaten hat die Laplace-Gleichung für rotationssymmetrische Potentialfunktionen $\phi(r,\vartheta)$ die Form

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}\right) = 0 \quad . \qquad (3-3)$$

Der Produktansatz $\phi(r,\vartheta) = F(r)\cdot G(\vartheta)$ führt mit der Separationskonstanten $\nu(\nu+1)$ für F auf die Differentialgleichung

$$r^2 \frac{d^2F}{dr^2} + 2r \frac{dF}{dr} - \nu(\nu+1)F = 0 \qquad (3-4)$$

mit den linear unabhängigen Lösungen r^{ν} und $r^{-\nu-1}$, und für G nach der Substitution $w = \cos\vartheta$ und $\tilde{G}(w) = G(\vartheta)$ auf die Legendresche Differentialgleichung

$$(1-w^2)\frac{d^2\tilde{G}}{dw^2} - 2w\frac{d\tilde{G}}{dw} + \nu(\nu+1)\tilde{G} = 0 \qquad (3-5)$$

mit den linear unabhängigen Lösungen $P_\nu(w)$ und $Q_\nu(w)$. P_ν und Q_ν sind die Legendrefunktionen erster und zweiter Art vom Grad ν (vgl. Abramowitz und Stegun (1970)). Da $Q_\nu(w)$ bei $w = 1$ eine Singularität hat, folgt daß jeder Ausdruck der Form

$$\phi_\nu = \left(A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-(1+\nu)} \right) P_\nu(\cos\vartheta) \qquad (3-6)$$

für beliebige ν, A_ν, B_ν eine Lösung von (3 - 3) ist, die nur im Ursprung und für nicht ganzzahlige ν auf der negativen z-Achse ($\cos\vartheta = -1$) singulär wird.

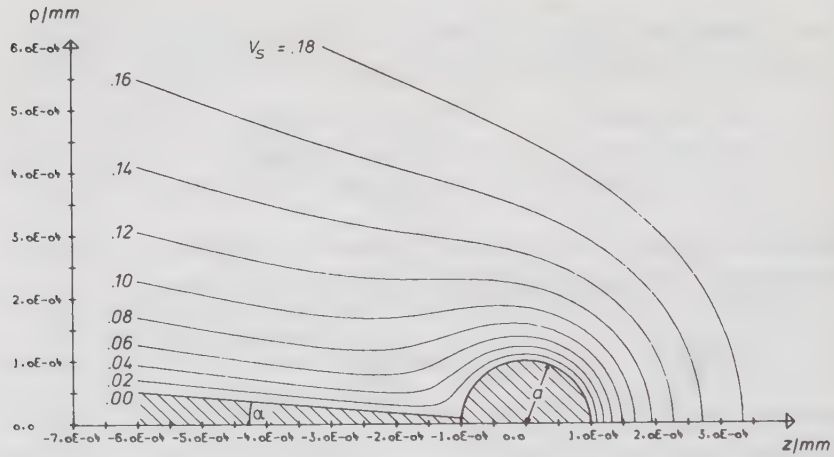

Abb. 1: Äquipotentiallinien in der Umgebung der Spitze nach dem SOC-Modell.
Parameter: $\alpha = 5^\circ$, a = 100 nm, d = 4 mm, $N_a = 1$.

Die Forderung, daß ϕ auf einem Kegel mit halbem Öffnungswinkel α, dessen Spitze im Ursprung liegt und auf einer Kugel mit Radius a um den Ursprung verschwinden soll (vgl. Abb.1), bewirkt, daß von den Lösungen (3 - 6) nur noch

$$\phi_n = A_n \left(\left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_n} - \left(\frac{a}{r}\right)^{1+\nu_n} \right) P_{\nu_n}(\cos\vartheta), \quad n = 1, \ldots \qquad (3-7)$$

bleiben, wobei die ν_n so bestimmt sind, daß

$$P_{\nu_n}(\cos(\pi-\alpha)) = P_{\nu_n}(-\cos\alpha) = 0 \qquad (3-8)$$

gilt. Wie auch von Lenz (1975) erwähnt wird, stellt

$$\phi(r,\vartheta) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_n} - \left(\frac{a}{r}\right)^{1+\nu_n}\right] P_{\nu_n}(\cos\vartheta) \qquad (3-9)$$

die allgemeinste Lösung von (3 - 3) dar, die die Bedingung $\phi = V_0 = \text{const.}$ auf dem oben definierten Teil des Randes erfüllt. Die noch unbekannten Koeffizienten A_n müssen so bestimmt werden, daß die Lösung (3 - 9) auch auf dem noch zu definierenden Teil des Randes die dort geforderte Bedingung erfüllt. Da es sich hierbei später um den Übergang zum Gebiet mit numerischer Lösung handelt, wird man nur die Potentialwerte V_l in endlich vielen Randpunkten (r_l, ϑ_l), $l = 1,\ldots,N$ kennen, so daß von der Reihe in (3 - 9) N Terme notwendig und hinreichend sind, um die restliche Randbedingung zu erfüllen. Man erhält damit zur Bestimmung der A_n ein lineares Gleichungssystem:

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \left[\left(\frac{r_l}{a}\right)^{\nu_n} - \left(\frac{a}{r_l}\right)^{1+\nu_n}\right] P_{\nu_n}(\cos\vartheta_l) = V_l - V_0 \quad , \; l = 1,\ldots, N \; . \qquad (3-10)$$

Dieses Gleichungssystem ist im allgemeinen lösbar, da Legendrefunktionen verschiedenen Grades sowie Radialfunktionen verschiedener Potenz linear unabhängig sind.

Die Berechnung der Legendrefunktionen von nicht ganzem Grad wird im Anhang I beschrieben. Zur Veranschaulichung ist in Abb.2 die Größe $1+\nu_n - n$ für einige n in Abhängigkeit vom Winkel α dargestellt.

Nimmt man von der Reihe in (3 - 9) nur den ersten Term mit $\nu = \nu_1$, so ist

$$V(r,\vartheta) = V_0 + (U - V_0) \cdot \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{\nu} - \left(\frac{a}{r}\right)^{1+\nu}}{\left(\frac{d}{a}\right)^{\nu} - \left(\frac{a}{d}\right)^{1+\nu}} \; P_\nu(\cos\vartheta) \qquad (3-11)$$

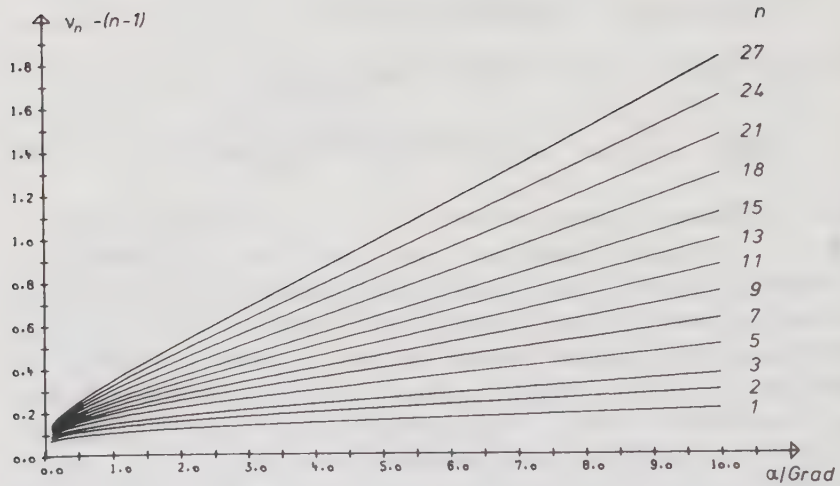

Abb. 2: Grade ν_n, für die $P_{\nu_n}(-\cos\alpha)=0$, als Funktion von α.

die Lösung von (3 - 3), die auf Kegel und Kugel den Wert V_o, bei z = d auf der Achse, also für r = d, cos ϑ = 1 den Wert U hat. In Abb.1 sind einige Linien V = const. für V_o = 0, U = 1, a = 100 nm, d = 4 mm, $\alpha = 5^o$ eingezeichnet. Eine dieser Linien soll nun die Spitzenkontur darstellen; sie schneide die Achse bei z = r_o und gehöre zu V = 0. Damit wird

$$V(r,\vartheta) = U \cdot \frac{(\frac{r_o}{a})^\nu - (\frac{a}{r_o})^{1+\nu} - \left[(\frac{r}{a})^\nu - (\frac{a}{r})^{1+\nu}\right] P_\nu(\cos\vartheta)}{(\frac{r_o}{a})^\nu - (\frac{a}{r_o})^{1+\nu} - \left[(\frac{d}{a})^\nu - (\frac{a}{d})^{1+\nu}\right]} \qquad (3 - 12)$$

die zugehörige Potentialverteilung. Diese Lösung wurde von Dyke et al. (1953) und von Everhart und Wiesner (1973) benutzt. Es ist klar, daß es durch die Beschränkung auf den ersten Term der Reihenentwicklung nach Festlegung der Spitzenform nicht mehr möglich ist, die Lösung an eine vorgegebene Anodenform anzupassen.

Im Fall der Lösung (3 - 9) geschieht die Anpassung an eine realistische Spitzenform nach demselben Verfahren. Dies wird genauer im Abschnitt 5.1 durchgeführt.

b) Gestreckte elliptische Koordinaten

Die Transformationsbeziehungen zwischen Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z und elliptischen Koordinaten u, v, Ψ lauten

$$\begin{aligned} \varrho &= R\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)} \quad , \quad 1 \leq u < \infty \\ \varphi &= \Psi \quad , \quad -1 \leq v \leq 1 \\ z &= R\cdot u\cdot v \quad , \quad 0 \leq \Psi < 2\pi \end{aligned} \qquad (3-13)$$

Die Flächen u = const. sind Rotationsellipsoide, die Flächen v = const. Rotationshyperboloide um die z-Achse mit gemeinsamen Brennpunkten bei $z = \pm R$. Speziell ist u = 1 die z-Achse im Bereich $-R \leq z \leq R$, v = -1 die z-Achse für $z < -R$, v = +1 die z-Achse für $z > R$. Abb.3 zeigt die Schnittlinien einiger Koordinatenflächen u = const. und v = const. mit einer Ebene Ψ = const. im Fall R = 5.

In diesen Koordinaten hat die Laplace-Gleichung für eine rotationssymmetrische Potentialfunktion $\phi(u,v)$ die Form

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[(u^2-1)\frac{\partial \phi}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[(1-v^2)\frac{\partial \phi}{\partial v}\right] = 0 \qquad (3-14)$$

Der Separationsansatz $\phi(u,v) = F(u)\cdot G(v)$ führt für F und G auf die Legendresche Differentialgleichung, so daß jeder

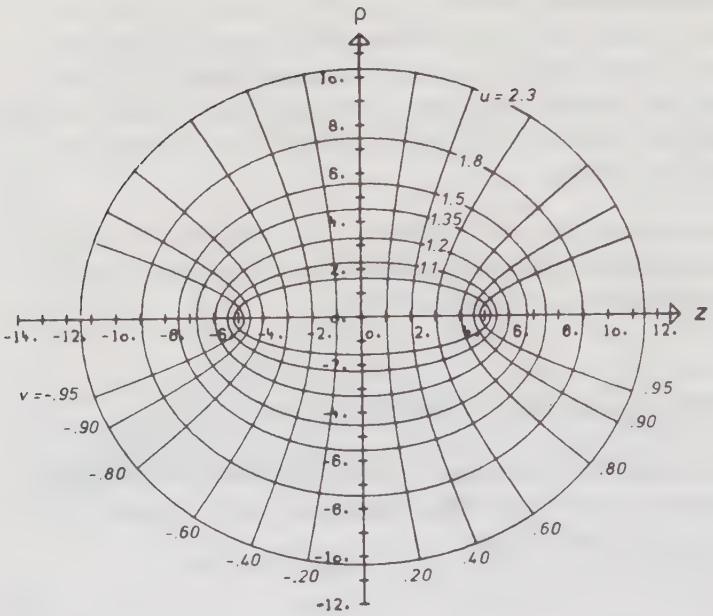

Abb. 3: Gestreckte elliptische Koordinaten u, v, ψ : Schnittlinien von Flächen u = const. und v = const. mit der ϱ,z-Ebene in Zylinderkoordinaten.

Ausdruck der Form

$$\phi_\nu = \left(A_\nu P_\nu(v) + B_\nu Q_\nu(v)\right)\left(a_\nu P_\nu(u) + b_\nu Q_\nu(u)\right) \qquad (3 - 15)$$

mit zunächst beliebigen ν , A_ν , B_ν , a_ν , b_ν und den Legendrefunktionen P_ν und Q_ν eine Lösung von (3 - 14) ist. Damit die Lösungen für u = 1 regulär sind, muß $b_\nu = 0$ sein. Soll die Lösung auch für $\varrho = 0$, $z > R$, d.h. für v = 1 regulär bleiben, so muß auch B_ν verschwinden. Eine Fläche $v = v_0 < 0$ dient nun als Approximation der Spitzenoberfläche. Wenn die Randbedingung $\phi_\nu(v_0) = 0$ erfüllt werden soll, kommen nur Lösungen (3 - 15) mit Indizes $\nu = \nu_n$ (n = 1,2,...) in Frage, für welche

$$P_{\nu_n}(v_o) = 0 \quad . \tag{3 - 16}$$

Eine auf der z-Achse reguläre Lösung von (3 - 14), die auf der Fläche $v = v_o$ verschwindet, läßt sich also in der Form

$$\phi(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_{\nu_n}(v) P_{\nu_n}(u) \tag{3 - 17}$$

schreiben. Die noch unbekannten Koeffizienten A_n können wieder wie bei Verwendung von Polarkoordinaten bestimmt werden.

Ein anderer Lösungsansatz (Kasper (1974)) verzichtet auf die Regularität der Lösungen (3 - 15) auf der z-Achse für $z > R$, indem er etwa das Lösungsgebiet auf $z < R$ beschränkt. In diesem Fall ist

$$\phi_\nu = A'_\nu \left(P_\nu(v) - \frac{P_\nu(v_o)}{Q_\nu(v_o)} \cdot Q_\nu(v) \right) P_\nu(u) \tag{3 - 18}$$

für beliebige ν , A'_ν eine Lösung, die auf der Spitzenoberfläche $v = v_o$ verschwindet. Dies gilt auch für eine Summe, in der nur ganzzahlige Indizes n vorkommen:

$$\phi(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n \left(P_n(v) - \frac{P_n(v_o)}{Q_n(v_o)} \cdot Q_n(v) \right) P_n(u) \quad . \tag{3 - 19}$$

Die Vollständigkeit dieser Entwicklung soll hier nicht untersucht werden. Für die Bestimmung der Koeffizienten A'_n gilt das oben für die A_n Gesagte. Dieser Lösungsansatz bietet den Vorteil, daß die Funktionen $P_n(x)$, $Q_n(x)$ mit ganzzahligem n in der Regel einfacher zu berechnen sind als die $P_\nu(x)$ mit nicht ganzzahligem ν bei Verwendung von (3 - 17) oder bei Benutzung von Polarkoordinaten. Die Beschränkung der Spitzenform auf Hyperboloide kann dadurch gelockert werden, daß man nach einem Vorschlag von Drechsler und Henkel (1954) der Lösung (3 - 17) oder (3 - 19) vor Bestimmung der A'_n eine kugelsymmetrische Lösung $c/r_s - c/r$ im Außenraum einer Kugel mit gleichem Krümmungsradius r_s und -mittelpunkt wie das gewählte Hyperboloid hinzufügt.

Fordert man für die Lösung (3 - 19) $\phi = 0$ für $v = v_o$ und $\phi = U$ für $v = 0$, so wird $A'_n = U\delta_{no}$ und ϕ unabhängig von u:

$$\phi(v) = U\left(1 - \frac{Q_o(v)}{Q_o(v_o)}\right) = U\left(1 - \frac{\ln(1+v) - \ln(1-v)}{\ln(1+v_o) - \ln(1-v_o)}\right) . \quad (3 - 20)$$

Wählt man nun noch R und v_o so, daß die Fläche $v = v_o$ ein Rotationshyperboloid mit Krümmungsradius r_s und Scheitelabstand d von der Ebene $z = 0$ ist, d.h.

$$R = d\sqrt{1 + r_s/d} \quad ,$$
$$v_o = -1\Big/\sqrt{1 + r_s/d} \quad , \qquad (3 - 21)$$

so ist (3 - 20) die in 2.1 beschriebene Lösung, die auf Gleichung (2 - 3) führt.

c) Parabolische Koordinaten

Die Transformationsbeziehungen zwischen Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z und parabolischen Koordinaten p, ψ, q lauten

$$\varrho = p \cdot q \quad , \quad 0 \leq p < \infty$$
$$\varphi = \psi \quad , \quad 0 \leq q < \infty \qquad (3 - 22)$$
$$z = \tfrac{1}{2}(p^2 - q^2) \quad , \quad 0 \leq \psi < 2\pi \quad .$$

Die Flächen p = const. bzw. q = const. sind nach links bzw. rechts geöffnete konfokale Rotationsparaboloide mit dem Ursprung als Brennpunkt. $p = 0$ ist die negative, $q = 0$ die positive z-Achse. Abb.4 zeigt die Schnittlinien einiger Koordinatenflächen mit einer Ebene ψ = const.

In diesen Koordinaten hat die Laplace-Gleichung für rotationssymmetrische Potentialfunktionen $\phi(p,q)$ die Form

$$\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) + \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial q}\left(q\frac{\partial \phi}{\partial q}\right) = 0 \quad . \qquad (3 - 23)$$

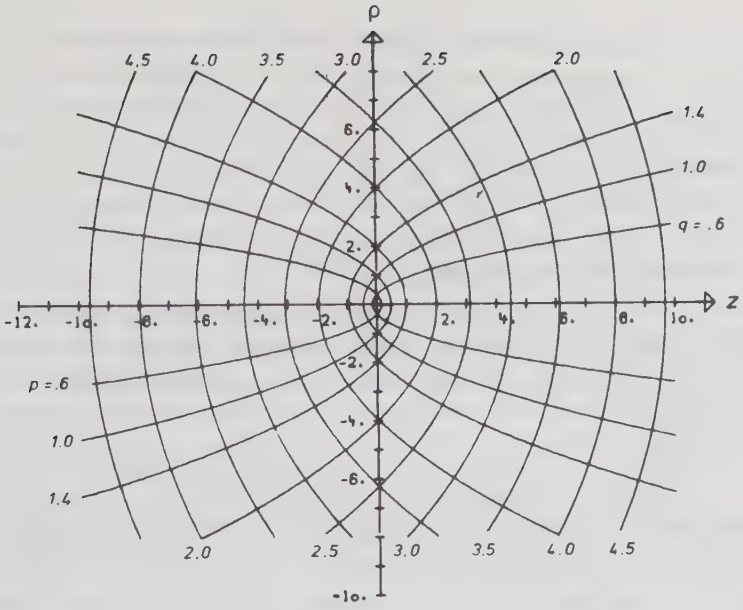

Abb. 4: Parabolische Koordinaten p, φ , q :
Schnittlinien von Flächen p = const. und q = const.
mit der ϱ,z-Ebene in Zylinderkoordinaten.

Der Separationsansatz $\phi(p,q) = F(p)\cdot G(q)$ liefert je nach Wahl der Separationskonstanten, daß

$$\phi_k = \left(A_k\, I_o(kp) + B_k\, K_o(kp)\right) J_o(kq)$$
$$\phi_{k'} = \left(a_{k'}\, J_o(k'p) + b_{k'}\, Y_o(k'p)\right) I_o(k'q) \qquad (3 - 24)$$

für beliebige $k,k' \neq 0$ Lösungen von (3 - 23) sind, die nur auf der negativen z-Achse Singularitäten haben. In beiden Lösungen ist als Grenzfall für $k \to 0$ bzw. $k' \to 0$ auch die Lösung

$$\phi_o = A + B\ \ln(p)$$

enthalten. Dabei sind $J_o(x)$ und $Y_o(x)$ die Besselfunktionen erster und zweiter Art der Ordnung 0, $I_o(x)$ und $K_o(x)$ die

modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art der Ordnung 0 (vgl. Abramowitz und Stegun (1970)). Approximiert man die Spitze durch ein Paraboloid $p = p_o$, so sind

$$\phi_k = A_k J_o(kq)\left(I_o(kp) - \frac{I_o(kp_o)}{K_o(kp_o)} K_o(kp)\right) ,$$
$$\phi_{k'} = a_{k'} I_o(k'q)\left(J_o(k'p) - \frac{J_o(k'p_o)}{Y_o(k'p_o)} Y_o(k'p)\right) \qquad (3 - 25)$$

Lösungen von (3 - 23), die auf der Spitzenoberfläche verschwinden. Fordert man darüber hinaus, daß die Lösungen auf jedem Paraboloid $p = p_1 > p_o$ auch für $q \to \infty$ beschränkt bleiben, so bleibt

$$\phi(p,q) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_o(k_i q)\left(I_o(k_i p) - \frac{I_o(k_i p_o)}{K_o(k_i p_o)} K_o(k_i p)\right) \qquad (3 - 26)$$

als Lösung von (3 - 23), die auf der Spitze verschwindet. Dabei sind die k_i durch die Nullstellen x_i von $J_o(x)$ bestimmt:

$$k_i = x_i/q_o \quad , \; i = 1,2,... \qquad (3 - 27)$$

Die Koeffizienten A_i sind wieder wie in den vorangegangenen Fällen zu bestimmen. Man kann auch hier zur besseren Approximation der Spitzenform zu (3 - 26) noch die Potentialverteilung eines kugelsymmetrischen Feldes hinzufügen.

Eine Lösung, die auf dem Paraboloid $p = p_1$ den Wert U hat, ist $\phi(p) = U \cdot \ln(p/p_o) / \ln(p_1/p_o)$. Aus (3 - 22) folgt für den Krümmungsradius $r_s = p_o^2$ und für den auf der Achse gemessenen Elektrodenabstand d zwischen den Flächen $p = p_o$ und $p = p_1$ $d = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_o^2)$. Damit wird

$$\phi(p) = \frac{U}{\ln(1+2d/r_s)} \cdot \ln(p^2/r_s) \quad . \qquad (3 - 28)$$

Dies ist die in 2.1 beschriebene Lösung, die für die Scheitelfeldstärke auf Gleichung (2 - 5) führt.

3.2 Numerische Lösung der Laplace-Gleichung

Bei der numerischen Lösung einer Differentialgleichung erhält man die Lösungsfunktion nur in einer endlichen Zahl von Punkten des Lösungsgebiets. Statt der Differentialgleichung, die Funktionswert und Ableitungen an einer Stelle miteinander verknüpft, verwendet man Beziehungen zwischen den Funktionswerten in benachbarten Punkten. Diese Beziehungen ersetzen die Differentialgleichung nur näherungsweise; man macht dabei einen „Diskretisierungsfehler". Im Fall der elliptischen Differentialgleichungen in zwei Variablen, der hier interessiert, werden hauptsächlich zwei Lösungsmethoden angewandt: die Finite-Element-Methode und die Finite-Difference-Methode.

Bei der Finite-Element-Methode wird das zur Differentialgleichung äquivalente Variationsproblem betrachtet. Man zerlegt das Lösungsgebiet in Polygone, meist Dreiecke, in deren Eckpunkten die Funktionswerte berechnet werden. Unter der Annahme, daß die Lösungsfunktion in jedem Dreieck durch eine lineare Funktion der Koordinaten approximiert werden kann, lassen sich die Beiträge der einzelnen Dreiecke zum Variationsintegral explizit durch die Funktionswerte in den Eckpunkten ausdrücken. Die Extremalitätsforderung an das Integral liefert dann ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Funktionswerte. Dies ist das Verfahren nullter Ordnung. Bei den Verfahren n-ter Ordnung, $n > 0$, werden die Ausgangsdreiecke noch systematisch in $(n+1)^2$ gleich große ähnliche Teildreiecke zerlegt, in deren Eckpunkten wieder die Lösung berechnet werden soll. Innerhalb eines übergeordneten Dreiecks wird die Lösungsfunktion dann in der Regel durch ein Polynom entsprechend höheren Grades approximiert.

Form, Größe und Anordnung der Dreiecke sind in weiten Grenzen beliebig, jedoch sollten keine zu spitzen Winkel auftreten. Man ist daher in der Unterteilung des Lösungsgebiets und in der Anpassung an die Randbedingungen sehr flexibel. In vielen

Fällen, in denen die Werte der Lösung nur in einigen Punkten interessieren, kommt man mit relativ wenigen Dreiecken aus. Das auftretende Gleichungssystem, dessen Dimension mit der Anzahl der Punkte übereinstimmt, in denen die Lösung berechnet werden soll, kann dann schnell direkt gelöst werden.

Im vorliegenden Fall wird jedoch die Lösung der Laplace-Gleichung in einer großen Zahl regelmäßig angeordneter Punkte benötigt, um dazwischen bei Bahnberechnungen mit hoher Genauigkeit interpolieren und differenzieren zu können. Dies führt schnell auf sehr große Gleichungssysteme und Speicherprobleme. Daher wurde die ohnehin leichter überschaubare und programmierbare Finite-Difference-Methode angewandt, bei der das auftretende Gleichungssystem nicht explizit abgespeichert zu werden braucht. Die Finite-Element-Methode wurde bei elektronenoptischen Berechnungen hauptsächlich von Munro (1973) angewandt. Eine Darstellung der zugrunde liegenden Theorie findet man z.B. bei Stoer-Bulirsch (1973).

Bei der Finite-Difference-Methode wird das Lösungsgebiet mit einem Maschennetz überdeckt und in jedem Maschenpunkt die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung ersetzt, die die Funktionswerte in benachbarten Punkten in Beziehung setzt. Wie man solche Differenzengleichungen aufstellt, ist z.B. bei Weber (1967) dargestellt. Die prinzipielle Vorgehensweise soll an der Herleitung einer 5-Punkte-Formel in einem quadratischen Maschennetz der Maschenweite h für die rotationssymmetrische Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (3 - 29)$$

gezeigt werden.

Abb.5 zeigt einen Ausschnitt aus dem Maschennetz. In der Umgebung des Punktes O mit den Koordinaten (ϱ_0, z_0) wird ϕ in eine Taylorreihe entwickelt:

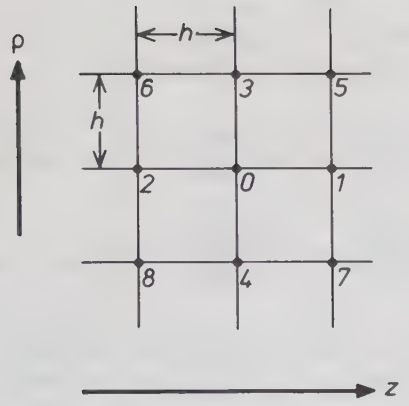

Abb. 5: Ausschnitt aus dem quadratischen Maschennetz zur Veranschaulichung der Indizierung in den Differenzenformeln.

$$\phi(\varrho,z) = \phi|_0 + (\varrho-\varrho_0)\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}\Big|_0 + (z-z_0)\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_0$$
$$+ \frac{1}{2}\left[(\varrho-\varrho_0)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\varrho^2}\Big|_0 + 2(\varrho-\varrho_0)(z-z_0)\frac{\partial^2\phi}{\partial\varrho\partial z}\Big|_0 + (z-z_0)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\Big|_0\right]$$
$$+ \frac{1}{6}\left[(\varrho-\varrho_0)^3\frac{\partial^3\phi}{\partial\varrho^3}\Big|_0 + 3(\varrho-\varrho_0)^2(z-z_0)\frac{\partial^3\phi}{\partial\varrho^2\partial z}\Big|_0 + 3(\varrho-\varrho_0)(z-z_0)\frac{\partial^3\phi}{\partial\varrho\partial z^2}\Big|_0\right.$$
$$\left. + (z-z_0)^3\frac{\partial^3\phi}{\partial z^3}\Big|_0\right] \qquad (3-30)$$
$$+ \quad O\left((\varrho-\varrho_0)^i\cdot(z-z_0)^k\right)$$

mit i+k = 4.

Setzt man hier die Koordinaten der 4 Nachbarpunkte 1,2,3,4 ein, so erhält man mit $\phi_i = \phi(\varrho_i, z_i)$:

$$\phi_1 = \phi_0 + h\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_0 + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\Big|_0 + \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3\phi}{\partial z^3}\Big|_0 + O(h^4)$$

$$\phi_2 = \phi_0 - h\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_0 + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\Big|_0 - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3\phi}{\partial z^3}\Big|_0 + O(h^4)$$

(3 - 31)

$$\phi_3 = \phi_0 + h\frac{\partial\phi}{\partial \varrho}\Big|_0 + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2\phi}{\partial \varrho^2}\Big|_0 + \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3\phi}{\partial \varrho^3}\Big|_0 + O(h^4)$$

$$\phi_4 = \phi_0 - h\frac{\partial\phi}{\partial \varrho}\Big|_0 + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2\phi}{\partial \varrho^2}\Big|_0 - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3\phi}{\partial \varrho^3}\Big|_0 + O(h^4)$$

Wegen der speziellen Anordnung der Maschenpunkte treten in den Gleichungen (3 - 31) nur 6 der 9 in (3 - 30) enthaltenen partiellen Ableitungen auf. Durch Linearkombination der Gleichungen (3 - 31) erhält man

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 4\phi_0 + h^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\Big|_0 + \frac{\partial^2\phi}{\partial \varrho^2}\Big|_0\right) + O(h^4)$$

und für $\varrho_0 \neq 0$

$$\frac{h}{2\varrho_0}(\phi_3 - \phi_4) = \frac{h^2}{\varrho_0}\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}\Big|_0 + O(h^4) \quad ,$$

also

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \frac{h}{2\varrho_0}(\phi_3 - \phi_4) = 4\phi_0 + h^2\Delta\phi\,|_0 + O(h^4) \quad .$$

Ist nun $\phi(\varrho,z)$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, so gilt

$$\phi_0 = \frac{1}{4}\left[\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \frac{h}{2\varrho_0}(\phi_3 - \phi_4)\right] + O(h^4) \quad . \qquad (3 - 32)$$

Diese Formel gilt nicht, wenn $\varrho_0 = 0$. Wegen der Rotationssymmetrie gilt aber

$$\frac{\partial^n\phi}{\partial\varrho^n}\Big|_{\varrho=0} = 0$$

für ungerades n und

$$\lim_{\varrho\to 0}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial\varrho^2}\Big|_{\varrho=0} \quad .$$

Aus (3 - 31) folgt daher für $\varrho_0 = 0$:

$$\phi_1 + \phi_2 + 4\phi_3 = 6\phi_0 + h^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\Big|_0 + 2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial \varrho^2}\Big|_0\right) + o(h^4)$$

$$= 6\phi_0 + h^2\,\Delta\phi\,|_0 + o(h^4)\ .$$

Für $\varrho_0 = 0$ muß also eine Lösung der Laplace-Gleichung die Beziehung

$$\phi_0 = \frac{1}{6}\left(4\phi_3 + \phi_1 + \phi_2\right) + o(h^4) \qquad (3 - 33)$$

erfüllen.

Vernachlässigt man nun in den Gleichungen (3 - 32) und (3 - 33) die Glieder von 4. und höherer Ordnung in h, so ist eine Funktion, die ihnen genügt, bis auf den Diskretisierungsfehler $o(h^4)$ eine Lösung der Laplace-Gleichung. Man benutzt (3 - 32) und (3 - 33) in den Punkten des Maschennetzes anstelle der Differentialgleichung.

Wären die Abstände h_i, $i=1,\ldots,4$ der Punkte 1,2,3,4 vom Punkt O nicht alle gleich, sondern $h_1 \neq h_2$ und/oder $h_3 \neq h_4$, so hätte der Diskretisierungsfehler die Ordnung h^3. Dann gilt nämlich:

$$\phi_0 = \left\{\frac{1}{h_1 h_2} + \frac{2\varrho_0 + h_4 - h_3}{2\varrho_0 \cdot h_3 \cdot h_4}\right\}^{-1} \cdot \left\{\frac{1}{h_1+h_2}\left(\frac{\phi_1}{h_1} + \frac{\phi_2}{h_2}\right) + \frac{1}{h_3+h_4}\left(\frac{\phi_3}{h_3} + \frac{\phi_4}{h_4}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\varrho_0(h_3+h_4)}\left(\frac{h_4}{h_3}\,\phi_3 - \frac{h_3}{h_4}\,\phi_4\right)\right\} + o(h^3)\ , \qquad (3 - 34)$$

falls $\varrho_0 \neq 0$, und

$$\phi_0 = \left\{\frac{1}{h_1 h_2} + \frac{2}{h_3^2}\right\}^{-1} \cdot \left\{\frac{1}{h_1+h_2}\left(\frac{\phi_1}{h_1} + \frac{\phi_2}{h_2}\right) + \frac{2}{h_3^2}\,\phi_3\right\} + o(h^3), \qquad (3 - 35)$$

falls $\varrho_0 = 0$.

Formeln mit geringerem Diskretisierungsfehler kann man erhalten, wenn man bei der Reihenentwicklung (3 - 30) Terme mit

höheren Ableitungen berücksichtigt und mehr Nachbarpunkte in die Rechnung mit einbezieht. Da sie aber, wie später gezeigt wird, in einem Iterationsverfahren verwendet werden sollen, sind aus Stabilitätsgründen nur solche Formeln sinnvoll, bei denen alle Funktionswerte ϕ_i positive Koeffizienten haben.

Kasper (1976) gibt eine stabile 9-Punkte-Formel mit einem Diskretisierungsfehler $o(h^6)$ an (vgl. Abb.5):

$$\phi_0 = C_+(\varrho_0)\left[2(\phi_1+\phi_2)+\phi_5+\phi_6+4\phi_3\right] + C_-(\varrho_0)\left[2(\phi_1+\phi_2)+\phi_7+\phi_8+4\phi_4\right]$$

$$+ C_0(\varrho_0)\left[\phi_3+\phi_4-\phi_1-\phi_2\right] + o(h^6) \qquad (3-36)$$

falls $\varrho_0 \neq 0$, mit

$$C_0(\varrho) = -h^2/\left[80\varrho^2\left(1+\frac{h^2}{24\varrho^2}\right)\right] ,$$

$$C_\pm(\varrho) = \left(1 \pm \frac{h}{2\varrho} + \frac{h^2}{24\varrho^2} \pm \frac{h^3}{12\varrho^3}\right)\Big/\left[20\left(1+\frac{h^2}{24\varrho^2}\right)\right]$$

und

$$\phi_0 = \frac{5}{58}(\phi_1+\phi_2) + \frac{7}{58}(\phi_5+\phi_6) + \frac{17}{29}\phi_3 + o(h^6) , \qquad (3-37)$$

falls $\varrho_0 = 0$.

Zur näherungsweisen Lösung der Laplace-Gleichung in den Punkten des Maschennetzes wird in jedem Punkt, für den vier gleichweit entfernte Nachbarn existieren (innerer Punkt) Gleichung (3 - 32), für jeden Achsenpunkt (3 - 33) und für dem Rand benachbarte Punkte (3 - 34) bzw. (3 - 35) benutzt. Man erhält so ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\phi_n = \sum_{k=1}^{N} A_{nk}\,\phi_k + b_n \quad , \; n = 1,\ldots,N \qquad (3-38)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\vec{\phi} = A\,\vec{\phi} + \vec{b} \; . \qquad (3-39)$$

Dabei wurden hier die inneren Punkte einfach in ϱ-Richtung von außen nach innen spaltenweise durchnumeriert ($1 \leq n \leq N'$) und anschließend die dem Rand benachbarten Punkte ($N' < n \leq N$). Da die Formeln (3 - 32) bis (3 - 35) immer nur die Potentiale in Nachbarpunkten enthalten, verschwinden die meisten der A_{nk}, insbesondere gilt stets $A_{nn} = 0$. Die b_n enthalten die Randwerte des Potentials, die beim hier betrachteten Dirichlet-Problem vorgegeben werden.

Weist man nun den ϕ_n beliebige Anfangswerte ϕ_n^0 zu, so kann man (3 - 38) z.B. nach der Vorschrift

$$\phi_n^m = \sum_{k=1}^{n-1} A_{nk}\,\phi_k^m + \sum_{k=n+1}^{N} A_{nk}\,\phi_k^{m-1} + b_n \quad , n=1,\dots,N \qquad (3 - 40)$$

für m = 1,2,... iterativ lösen. Dies ist das Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Offensichtlich ist es dabei gar nicht nötig, die Matrix A explizit aufzustellen, denn bei der Iteration kann in jedem Punkt einfach die betreffende der Gleichungen (3 - 32) bis (3 - 35) benutzt und der neu berechnete Wert ϕ_n^m anstelle von ϕ_n^{m-1} abgespeichert werden. Man braucht so nur Speicherplatz für die Funktionswerte ϕ_n , n = 1,...,N. Um eine schnellere Konvergenz des Verfahrens zu erreichen, wurde nach der Methode der sukzessiven Überrelaxation (SOR) statt (3 - 40) die Iterationsvorschrift

$$\phi_n^m = \phi_n^{m-1} + \omega\Big[\sum_{k=1}^{n-1} A_{nk}\phi_k^m + \sum_{k=n+1}^{N} A_{nk}\phi_k^{m-1} + b_n - \phi_n^{m-1}\Big] \quad , \qquad (3 - 41)$$

in Vektorschreibweise

$$\vec{\phi}^m = G(\omega)\,\vec{\phi}^{m-1} + \vec{b}' \qquad (3 - 42)$$

angewandt. Die Iterationsmatrix $G(\omega)$ ist durch

$$G(\omega) = (I - \omega L)^{-1}\cdot\big[(1-\omega)I + \omega R\big] \quad , \qquad (3 - 43)$$

$\vec{b}'$ durch

$$\vec{b}' = \omega\,(I - \omega L)^{-1}\cdot\vec{b}$$

gegeben, wobei I die N×N-Einheitsmatrix ist. L bzw. R ist die linke untere bzw. rechte obere Dreiecksmatrix von A, ω $(1 < \omega < 2)$ ist der Überrelaxationsfaktor. Die zur Erfüllung der Abbruchsbedingung für das Iterationsverfahren

$$\max_{n=1,\cdots,N} \left| \phi_n^m - \phi_n^{m-1} \right| < \delta \qquad (3 - 44)$$

notwendige Anzahl von Iterationen ist bei fester Schranke δ von ω abhängig, wobei ein optimaler Wert ω_0 existiert. Diesen Sachverhalt hat Lenz (1973) dargestellt, wobei er $C = \omega - 1$ als Überrelaxationskoeffizient bezeichnet.

Es besteht nun noch die Aufgabe, ω_0 für das jeweils vorliegende Problem möglichst gut zu finden. Setzt man von der Matrix A gewisse Eigenschaften voraus, die hier wegen der dem Rand benachbarten Punkte und der gewählten Numerierung nicht streng erfüllt sind, so kann man zeigen (vgl. Weber (1967), Ames (1969)), daß die Eigenwerte λ_i von A alle reell sind, daß für alle i $|\lambda_i| < 1$ gilt und daß ω_0 durch

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \qquad (3 - 45)$$

gegeben ist, wobei λ_1 der betragsgrößte Eigenwert von A ist. λ_1 kann jedoch nur in Spezialfällen ohne großen Aufwand berechnet werden. Carré (1961) schlägt vor, den Zusammenhang

$$\lambda_i = \frac{\lambda_i' + \omega - 1}{\omega \cdot \sqrt{\lambda_i'}} \qquad (3 - 46)$$

zwischen den Eigenwerten λ_i von A und den Eigenwerten λ_i' von $G(\omega)$ auszunutzen, der insbesondere für die jeweils betragsgrößten, λ_1 und λ_1' gilt. Die Methode zur Bestimmung von λ_1' beruht darauf, daß für $\omega < \omega_0$ die λ_i' reell und voneinander verschieden sind, so daß nach einigen Iterationen die Abweichung ε_n^m der Lösung ϕ_n^m nach der m-ten Iteration von der exakten Lösung ϕ_n, $\varepsilon_n^m = \phi_n^m - \phi_n$, bei jedem Iterationsschritt um den Faktor λ_1' abnehmen wird. Dies gilt dann auch für $\delta\phi_n^m := \phi_n^m - \phi_n^{m-1}$, und mit

$$\lambda_1' \approx \sum_{n=1}^{N} |\delta \phi_n^m| \Big/ \sum_{n=1}^{N} |\delta \phi_n^{m-1}| \qquad (3 - 47)$$

kann aus (3 - 45) und (3 - 46) ein Schätzwert für ω_0 berechnet werden. Mit folgendem, von Carré (1961) angegebenen Verfahren wurden in der vorliegenden Arbeit gute Ergebnisse erzielt: 12 Iterationen werden mit $\omega = 1.375$ durchgeführt, danach ein Schätzwert ω_1 für ω_0 berechnet. Mit $\omega = \omega_i - \frac{1}{4}(2 - \omega_i)$, $i = 1, \ldots$ werden so lange jeweils weitere 12 Iterationen durchgeführt und ein Schätzwert ω_{i+1} für ω_0 berechnet, bis $|\omega_{i+1} - \omega_i| < \frac{1}{20}(2 - \omega_{i+1})$ ist. Dann wird mit $\omega = \omega_{i+1}$ bis zum Abbruch des Iterationsverfahrens gerechnet.

Es sei hier noch erwähnt, daß für $\omega = \omega_0$ aus (3 - 45) und (3 - 46) $\lambda_1'(\omega_0) = \omega_0 - 1$ folgt, daß also bei Verwendung des optimalen Relaxationsfaktors der von Lenz (1973) benutzte Koeffizient C gerade mit dem größten Eigenwert der Iterationsmatrix $G(\omega_0)$ identisch ist.

Der Diskretisierungsfehler von Gl. (3 - 32) z.B. ist durch

$$-\frac{h^4}{48}\left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^4}\Big|_0 + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4}\Big|_0\right) - \frac{h^4}{24 s_0}\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3}\Big|_0 + O(h^6)$$

gegeben. Die Approximation der Differentialgleichung durch die Differenzengleichung wird also dort schlecht sein, wo die höheren Ableitungen von ϕ merkliche Beiträge liefern. Aus diesem Grunde schlägt Lenz (1973) vor, in der Umgebung scharfer Kanten von Polschuhen oder Elektroden die Differenzenformeln durch Interpolationsformeln zu ersetzen, die das analytische Verhalten von ϕ in der Nähe scharfer Kanten berücksichtigen.

Oft ist es auch erforderlich, zur Verringerung des Diskretisierungsfehlers in Teilbereichen des Lösungsgebiets Maschennetze mit kleinerer Maschenweite zu benutzen. In Abb.6 ist ein Übergang zwischen zwei Bereichen mit verschiedenen Maschenweiten h und k = h/2 dargestellt. $\vec{\phi}(h)$ und $\vec{\phi}(k)$ seien die

Vektoren der Funktionswerte in den Gitterpunkten der beiden Maschennetze.

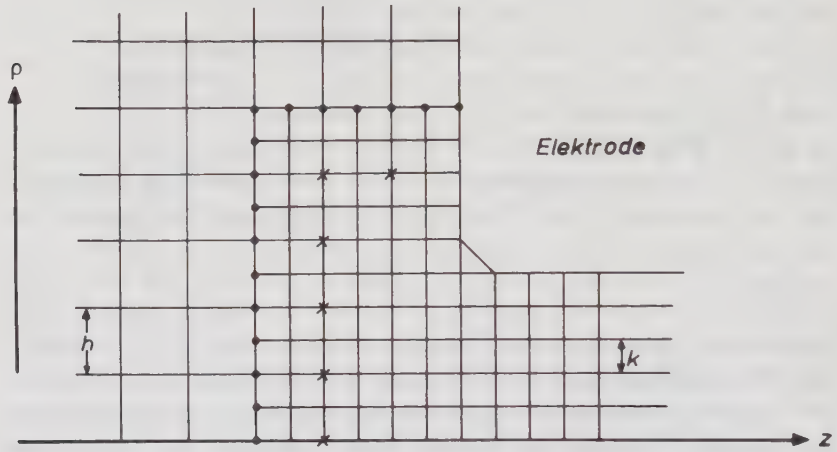

Abb. 6: Übergangsbereich zwischen zwei Maschennetzen mit verschiedener Maschenweite h und k = h/2 .

Beginnend mit den Ausgangswerten für die iterative Lösung wird zunächst $\vec{\phi}^1(h)$ berechnet, wobei die mit Kreuzen (x) bezeichneten Punkte als Randpunkte betrachtet werden. Danach werden in den mit Dots (•) bezeichneten Punkten durch Interpolation aus $\vec{\phi}^1(h)$ die Werte $\phi_i^1(k)$ gewonnen. Diese dienen als Randwerte für die Berechnung von $\vec{\phi}^1(k)$. Jetzt werden in den mit Kreuzen (x) bezeichneten Punkten für $\phi_i^1(h)$ die entsprechenden Werte $\phi_i^1(k)$ übernommen und anschließend $\vec{\phi}^2(h)$ berechnet. Dieses Verfahren wird so lange fortgeführt, bis die Abbruchbedingung (3 - 44) für beide Maschennetze erfüllt ist.

Bei Verwendung von mehreren Maschennetzen wurde für jedes ein

eigener Überrelaxationsfaktor benutzt. Schätzwerte dafür werden wieder nach der oben beschriebenen Methode gewonnen, jedoch war es nötig, stets mit etwas kleineren Werten als den Schätzwerten zu rechnen. Dabei hat sich die empirische Beziehung

$$\omega = 0.94\,\omega_i + 0.06 \quad , \qquad (3 - 48)$$

als geeignet erwiesen. Die Tatsache, daß geringere Werte als die Schätzwerte benutzt werden mußten, steht in Einklang mit den Überlegungen von Schwertfeger und Kasper (1974), da jetzt die für die Realität der λ_i notwendigen Voraussetzungen noch weniger erfüllt sind als bei Verwendung eines einzigen Maschennetzes.

Eine erhebliche Steigerung der Genauigkeit der Potentialberechnung konnte erzielt werden, wenn in den inneren Punkten der Maschennetze statt Gleichung (3 - 32), (3 - 33) die Gleichungen (3 - 36), (3 - 37) für die Iteration benutzt wurden. Da diese Gleichungen etwas mehr Rechenaufwand erfordern, wurden sie erst verwendet, wenn

$$\max_{1 \le n \le N} | \phi_n^m - \phi_n^{m-1} | < 10^{-6} \left(\max_{1 \le n \le N} \phi_n - \min_{1 \le n \le N} \phi_n \right)$$

war. Bei Verwendung eines Rechners mit 11 Dezimalstellen wurde für die Abbruchbedingung (3 - 44) $\delta = 10^{-9}$ gewählt.

3.3 Kombination von analytischer und numerischer Lösung

Zur Lösung der Laplace-Gleichung in einem System mit Feldemissionsspitze diente eine Kombination der in den Abschnitten 3.1 und 3.2 beschriebenen Methoden. Abb.7 zeigt die prinzipielle Situation in der ϱ,z-Ebene.

Die Spitze ist von einem rechteckförmigen Gebiet G_a umgeben, in dem eine analytische Lösung der Form (3 - 9) benutzt wird. Daran schließt sich, bis zum durch die Elektroden gegebenen

Rand, das Gebiet G_d an, in dem die Laplace-Gleichung mittels Differenzenverfahren gelöst wird. Der Übergang zwischen G_a und G_d wird wie der Übergang zwischen zwei Gebieten mit verschiedener Maschenweite behandelt. Die Größe des Gebietes G_a wurde in Abhängigkeit von der in G_d benutzten Maschenweite so bestimmt, daß in den mit Kreuzen (x) bezeichneten Punkten der Diskretisierungsfehler höchstens von derselben Größenordnung ist wie die Genauigkeit des Differenzenverfahrens im übrigen Gebiet G_d. Diese ist bei den verwendeten Maschenweiten stets einige Zehnerpotenzen schlechter als die Iterationsgenauigkeit δ aus (3 - 44).

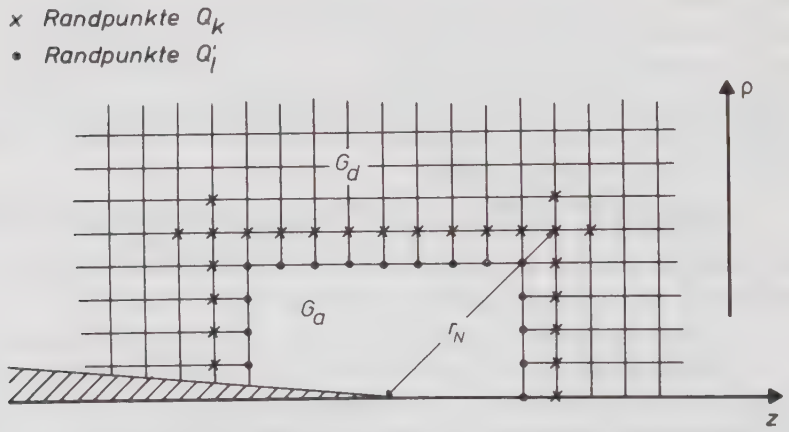

Abb. 7: Übergangsbereich zwischen dem Gebiet G_a mit analytischer Lösung und dem Gebiet G_d mit Lösung nach dem Differenzenverfahren.

Zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers wurde eine analytische Näherungslösung der Form (3 - 11) herangezogen. Als Maß für den Fehler diente die Abweichung zwischen dem

analytischen Wert in einem Maschenpunkt und dem Resultat der Differenzenformel, wenn man die analytischen Werte der Nachbarpunkte einsetzt. Als weiteres Kriterium diente die Forderung, daß die in G_a und G_d berechneten Feldstärken genügend glatt ineinander übergehen müssen.

Kegelwinkel α und Kugelradius a wurden der Systemgeometrie entsprechend gewählt (vgl. 5.1) und damit nach (3 - 8) die Grade ν_n , n = 1,...,N_a berechnet. N_a ist die Zahl der in Abb.7 mit Kreuzen (x) bezeichneten Randpunkte $Q_k(r_k,\vartheta_k)$, k = 1,...,N_a von G_a. Für die analytische Lösung wurde nach (3 - 9) der Ansatz

$$\phi_a(r,\vartheta) = \sum_{n=1}^{N_a} A_n f_n(r) P_{\nu_n}(\cos\vartheta) \qquad (3 - 49)$$

gemacht, mit normierten Radialfunktionen

$$f_n(r) = \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_n} - \left(\frac{a}{r}\right)^{1+\nu_n}\right] \Big/ \left[\left(\frac{r_N}{a}\right)^{\nu_n} - \left(\frac{a}{r_N}\right)^{1+\nu_n}\right] . \qquad (3 - 50)$$

r_N wurde wie in Abb.7 gewählt. Gleichung (3 - 49) impliziert, daß $\phi_a(a,\vartheta)$ verschwindet. Mit $\phi_a(r,\vartheta)$ ist auch $C_1 \phi_a + C_2$ eine Lösung der Potentialgleichung. In 5.1 wird gezeigt, wie man die willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 wählen muß, um ausgewählte Äquipotentialflächen auf vorgegebene Potentialwerte zu legen.

Beginnend mit einem willkürlichen Koeffizientensatz $A_1^o = 1$, $A_n^o = 0$, n = 2,...,N_a und einem Anfangsvektor $\vec{\phi}^o$ für die Lösung in G_d wurden zunächst in den in Abb.7 mit Dots (•) bezeichneten Randpunkten $Q_l'(r_l',\vartheta_l')$, l = 1,...,N_a' die Werte ϕ_l' von (3 - 49) berechnet. Diese Potentialwerte dienten als Randwerte für anschließend durchgeführte 10 Iterationen im Gebiet G_d. Aus den danach vorliegenden Potentialwerten ϕ_k in den Punkten Q_k wurde dann durch Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{n=1}^{N_a} A_n' f_n(r_k) P_{\nu_n}(\cos\vartheta_k) = \phi_k \quad , \; k = 1,...,N_a \qquad (3 - 51)$$

ein neuer Koeffizientensatz A'_n gewonnen. Auch an dieser Stelle wurde die Methode der Überrelaxation angewandt. Zur Berechnung der neuen Randwerte ϕ'_L für weitere Iterationen in G_d wurde nämlich statt A'_n der Koeffizientensatz

$$A_n^m = A_n^{m-1} + c\,(A'_n - A_n^{m-1}) \quad , n = 1,\ldots,N_a \qquad (3 - 52)$$

mit c = 1.5 benutzt.

Dieses Verfahren wurde so lange fortgesetzt, bis für eine vorgegebene Iterationsgenauigkeit δ

$$\delta_d := \max_{G_d} |\phi_n^m - \phi_n^{m-1}| < \delta$$

und $$\delta_a := \max_{1 \le L \le N'_a} |\phi'^m_L - \phi'^{m-1}_L| < \delta \qquad (3 - 53)$$

erfüllt war. Abb.8 zeigt ein Blockdiagramm des Rechenverfahrens.

Bei den in den Abschnitten 5 und 6 beschriebenen Anwendungen ergab sich, daß die Koeffizienten A_n zwar betragsmäßig nicht monoton mit n abnehmen, jedoch überwiegen die ersten Koeffizienten um 1 bis 2 Zehnerpotenzen. Weiter wurde festgestellt, daß (3 - 49) auf dem Rand von G_a zwischen den Stützstellen einen glatten Verlauf ohne Oszillationen aufweist und daß die höheren Terme der Reihe stets um mehrere Zehnerpotenzen kleiner als die ersten sind.

Eine Testrechnung, bei der statt $\nu_1,\ldots,\nu_{24}$ die Grade $\nu_2,\ldots,\nu_{25}$ benutzt wurden, lieferte ein ganz anderes Lösungsverhalten: Die Koeffizienten A_n wachsen betragsmäßig mit n an, so daß die höheren um 3 bis 4 Zehnerpotenzen überwiegen. Dasselbe gilt für die Beiträge der höheren Terme in (3 - 49) und es treten starke Oszillationen zwischen den Stützstellen auf.

Es wäre denkbar, daß für bestimmte Anordnungen in ähnlicher Weise Differenzenverfahren und Finite-Element-Methode kombiniert

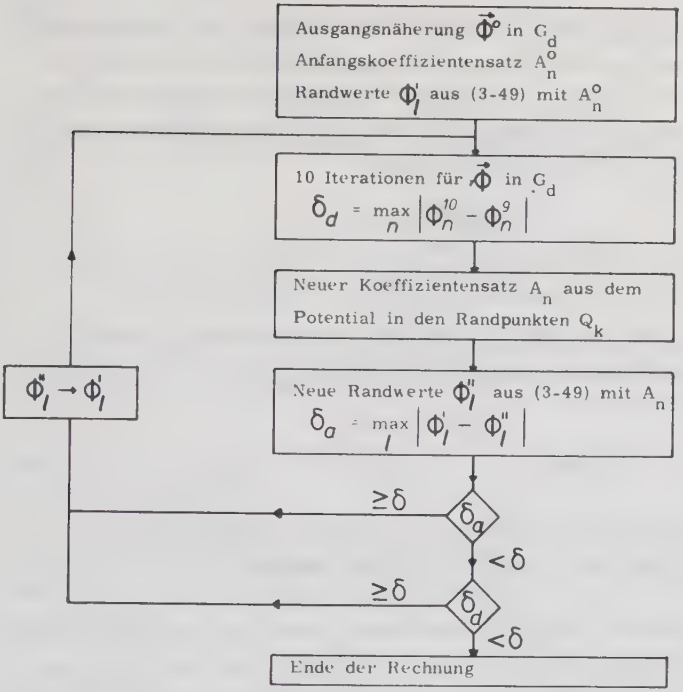

Abb. 8: Blockdiagramm der Kombination von analytischer und numerischer Lösungsmethode.

werden könnten. In einem für Bahnberechnungen relevanten Bereich in der Nähe der Achse wird mit einem feinen, regelmässigen Maschennetz das Differenzenverfahren benutzt, während in dem für größere Achsenabstände bis zu den Randbedingungen reichenden Gebiet die Finite-Element-Methode mit relativ wenigen Dreiecken eingesetzt wird. Das Rechenverfahren würde dann analog zu dem eben beschriebenen verlaufen.

Da bei der Berechnung von Φ_l' aus (3 - 49) und in (3 - 51) die Funktionen $f_n(r)$ und $P_{\nu_n}(\cos\vartheta)$ immer mit denselben

Argumenten (r_k, ϑ_k) bzw. (r'_l, ϑ'_l) auftreten, brauchen diese nur einmal explizit berechnet und abgespeichert werden. In den dem Spitzenschaft unmittelbar benachbarten Punkten von G_d wurde nicht die Differenzenformel (3 - 34) sondern die logarithmische Interpolationsformel

$$\phi_0 = \phi_3 \cdot \frac{\ln\left(\frac{\varrho_0}{\varrho_0 - h_4}\right)}{\ln\left(\frac{\varrho_0 + h_3}{\varrho_0 - h_4}\right)} \qquad (3 - 54)$$

benutzt. $\phi_0, \phi_3, h_3, h_4, \varrho_0$ haben hier dieselbe Bedeutung wie bei der Differenzenformel (3 - 34).

3.4 Bestimmung des Potentials und seiner Ableitungen in einem beliebigen Punkt des Lösungsgebiets

Für die Berechnung von Teilchenbahnen oder für die Suche von Äquipotentiallinien benötigt man in einem Punkt $Q(\varrho, z)$ das Potential $\phi(\varrho, z)$ sowie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \phi}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial \phi}{\partial z}$. Liegt Q in G_a, so hat man einfach

$$\phi(\varrho, z) = \phi_a(r(\varrho, z), \vartheta(\varrho, z)) \qquad (3 - 55)$$

mit ϕ_a nach (3 - 49),

$$r(\varrho, z) = \sqrt{\varrho^2 + (z - z_s)^2}\,,$$

$$\cos[\vartheta(\varrho, z)] = \frac{z - z_s}{\sqrt{\varrho^2 + (z - z_s)^2}}\,. \qquad (3 - 56)$$

z_s ist dabei die z-Koordinate des Ursprungs des für die analytische Lösung benutzten Polarkoordinatensystems. Für die Ableitungen erhält man aus (3 - 49) und (3 - 56)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varrho} = \sin\vartheta \left\{ \sum_{n=1}^{N_a} A_n f_n'(r) P_{\nu_n}(\cos\vartheta) - \frac{1}{r} \cos\vartheta \sum_{n=1}^{N_a} A_n f_n(r) P_{\nu_n}'(\cos\vartheta) \right\}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \cos\vartheta \sum_{n=1}^{N_a} A_n f_n'(r) P_{\nu_n}(\cos\vartheta) + \frac{1}{r} \sin^2\vartheta \sum_{n=1}^{N_a} A_n f_n(r) P_{\nu_n}'(\cos\vartheta) \qquad (3 - 57)$$

mit

$$f_n'(r) = \frac{d}{dr} f_n(r) \quad , \quad f_n(r) \quad \text{nach (3 - 50)},$$

$$P_{\nu_n}'(\cos\vartheta) = \frac{d}{d(\cos\vartheta)} P_{\nu_n}(\cos\vartheta) \; . \qquad (3 - 58)$$

Wegen der Berechnung von $P'_{\nu_n}(\cos\vartheta)$ sei wieder auf den Anhang I verwiesen.

Liegt der Punkt Q in G_d, so werden spezielle Interpolationsformeln benutzt. Man definiert zu einem gegebenen Punkt Q die ganzen Zahlen

$$m = \left[\frac{\varrho}{h} + \frac{1}{2} \right] \quad ; \quad n = \left[\frac{z}{h} \right] \quad ,$$

so daß

$$(m - \tfrac{1}{2}) \cdot h \leq \varrho < (m + \tfrac{1}{2}) \cdot h$$

und

$$n \cdot h \leq z < (n + 1) \cdot h \quad .$$

Falls $m \geq 2$, nähert man das Potential $\phi(\varrho, z)$ durch einen Ausdruck der Form

$$\begin{aligned} \phi(\varrho, z) = {} & a_1 + a_2 \bar{\varrho} + a_3 \bar{z} + a_4 \bar{\varrho}^2 + a_5 \bar{\varrho}\bar{z} + a_6 \bar{z}^2 \\ & + a_7 \bar{\varrho}^3 + a_8 \bar{\varrho}^2 \bar{z} + a_9 \bar{\varrho} \bar{z}^2 + a_{10} \bar{z}^3 + a_{11} \bar{\varrho}^4 \\ & + a_{12} \bar{\varrho}^3 \bar{z} + a_{13} \bar{\varrho}^2 \bar{z}^2 + a_{14} \bar{\varrho} \bar{z}^3 + a_{15} \bar{\varrho}^4 \bar{z} \\ & + a_{16} \bar{\varrho}^2 \bar{z}^3 \end{aligned} \qquad (3 - 59)$$

an, wobei

$$\varrho_o = m \cdot h \quad , \quad z_o = (n + \tfrac{1}{2}) \cdot h \quad ,$$

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{h}(\varrho - \varrho_o) \quad , \quad \bar{z} = \frac{1}{h}(z - z_o) \quad , \qquad (3 - 60)$$

also $\quad -\frac{1}{2} \leq \bar{\varrho} < +\frac{1}{2} \quad , \quad 0 \leq \bar{z} < 1 \quad .$

Die Koeffizienten a_i , $i = 1,\ldots,16$ des Ansatzes (3 - 59) können nun als Linearkombinationen der Potentiale ϕ und Ableitungen $\frac{\partial \phi}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ in den sechs in Abb. 9a dargestellten Nachbarpunkten ausgedrückt werden. Die Ableitungen in den Punkten 3 und 4 werden dazu nicht benutzt. Die Linearkombinationen sind im Anhang II angegeben. Sie wurden in Zusammenarbeit mit Hauke (vgl. Hauke (1977)) hergeleitet.

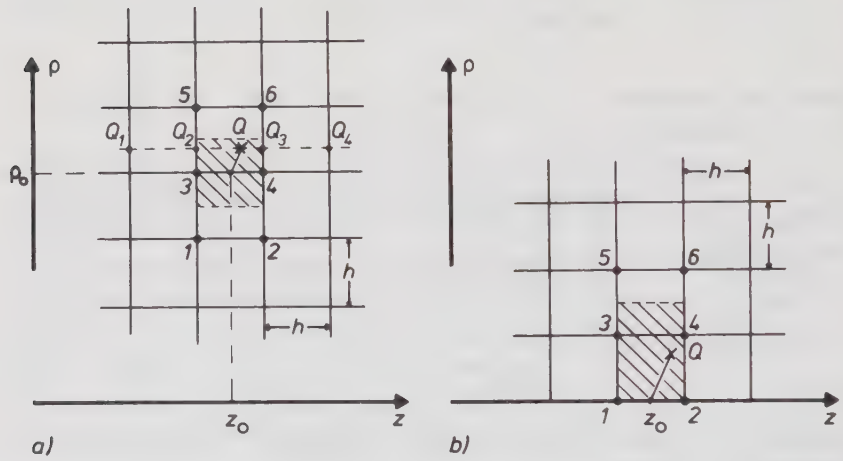

Abb. 9: Ausschnitt aus dem Maschennetz zur Veranschaulichung der Wahl der Nachbarpunkte für die Interpolationsformeln
a) im Normalfall ($\varrho_0 > 0$) ,
b) in Achsennähe ($\varrho_0 = 0$) .

In der Nähe der Achse (für $m < 2$) wird statt (3 - 59) ein Ansatz benutzt, der die Rotationssymmetrie dadurch berücksichtigt, daß er nur gerade Potenzen von $\bar{\varrho}$ enthält:

$$\begin{aligned}\phi(\varrho,z) = {} & b_1 + b_2\bar{z} + b_3\bar{z}^2 + b_4\bar{z}^3 + b_5\bar{\varrho}^2 + b_6\bar{\varrho}^2\bar{z} \\ & + b_7\bar{\varrho}^2\bar{z}^2 + b_8\bar{\varrho}^2\bar{z}^3 + b_9\bar{\varrho}^4 + b_{10}\bar{\varrho}^4\bar{z} \\ & + b_{11}\bar{\varrho}^4\bar{z}^2 + b_{12}\bar{\varrho}^4\bar{z}^3 + b_{13}\bar{\varrho}^6 + b_{14}\bar{\varrho}^6\bar{z} \\ & + b_{15}\bar{\varrho}^8 + b_{16}\bar{\varrho}^8\bar{z} \quad .\end{aligned} \tag{3 - 61}$$

Dabei ist $\bar{\varrho} = \varrho/h$ und wieder $\bar{z} = \frac{1}{h}(z - z_o)$. Diesmal gilt $0 \leq \bar{\varrho} < 3/2$. Die Koeffizienten $b_1,\ldots,b_{16}$ können wieder, wie im Anhang II angegeben, als Linearkombinationen des Potentials und seiner partiellen Ableitungen in den in Abb. 9b dargestellten Nachbarpunkten ausgedrückt werden.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}$ und $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ im Punkt Q folgen einfach durch Differentiation der Ausdrücke (3 - 59) und (3 - 61) nach $\bar{\varrho}$ bzw. $\bar{z}$.

Gegenüber der üblichen Methode, durch 4-Punkte Lagrangeinterpolation in radialer Richtung in den Punkten $Q_1,\ldots,Q_4$ (vgl. Abb. 9a) und durch nochmalige Interpolation in z-Richtung dann ϕ , $\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}$ und $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ in Q zu erhalten, hat die Anwendung der Formeln (3 - 59) bzw. (3 - 61) und ihrer Ableitungen den Vorteil, daß die zur Rechnung benötigten Nachbarpunkte dicht beim Punkt Q liegen. So können diese Formeln bei einem Gebiet G_d mit parallel zu Maschenlinien verlaufender Berandung im ganzen Gebiet angewandt werden, mit Ausnahme eines Streifens der Breite h/2 entlang der radialen Begrenzung.

Die für die Rechnung benötigten partiellen Ableitungen $\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}$ und $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ in den Maschenpunkten wurden durch Anwendung folgender eindimensionaler Differentiationsformeln gewonnen:

$$\begin{aligned}f'(x_o) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_o} = \frac{1}{12h}\Big[& 8(f(x_o+h)-f(x_o-h)) \\ & -(f(x_o+2h)-f(x_o-2h))\Big] + o(h^4)\end{aligned} \tag{3 - 62}$$

oder bei höherer Genauigkeitsanforderung

$$f'(x_o) = \frac{1}{60h}\left[45(f(x_o+h)-f(x_o-h)) - 9(f(x_o+2h)-f(x_o-2h)) + f(x_o+3h) - f(x_o-3h)\right] + o(h^6) \quad . \qquad (3-63)$$

In der Nähe des Randes von G_d, wenn die in (3 - 62) vorkommenden Funktionswerte nicht alle definiert sind, wurde die Beziehung

$$f'(x_o) = \pm\frac{3}{h}(f(x_o)-f(x_o \mp 2h)) - f'(x_o \mp 2h) - 4f'(x_o \mp h) + o(h^4) \qquad (3-64)$$

angewandt. Diese Formel erhält man aus der Identität

$$f(x_o) = f(x_o \mp 2h) \pm \int_{x_o \mp 2h}^{x_o} f'(x)\,dx \quad ,$$

wenn man das Integral durch die Simpsonregel ersetzt und die Gleichung nach $f'(x_o)$ auflöst.

4. Modell einer klassischen Energie- und Richtungsverteilung der austretenden Elektronen bei der Feldemission

Obwohl Feldemission meist an feinen Spitzen auftritt, kann hier eine ebene Betrachtung durchgeführt werden, da sich alle Vorgänge in einem so kleinen Bereich vor der Spitze abspielen, daß praktisch ein homogenes elektrisches Feld vorliegt und die Spitze näherungsweise als eben erscheint.

Es sei $$E = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + V(z) \qquad (4 - 1)$$

die Gesamtenergie eines Elektrons, V die potentielle Energie. Dabei gelte E = 0 für ein bei abgeschaltetem äußeren Feld im Unendlichen ruhendes Elektron. Weiter wird wie üblich

$$W := \frac{1}{2} m v_z^2 + V(z) \qquad (4 - 2)$$

als Normalenergie bezeichnet. In Abb. 10 ist der eindimensionale Potentialverlauf in der Nähe der Spitzenoberfläche schematisch dargestellt.

Unter der Annahme eines freien Elektronengases im Festkörper erhält man z.B. nach Good und Müller (1956) und Young (1959) für die Zahl der pro Zeit und Fläche austretenden Elektronen mit einer Gesamtenergie zwischen E und E + dE und einer Normalenergie zwischen W und W + dW:

$$P(E,W)\, dE\, dW = \frac{4\pi m}{h^3} \cdot \frac{1}{\exp\left[\frac{E-\zeta}{kT}\right] + 1} \cdot \exp\left[-c + \frac{W-\zeta}{d}\right] dE\, dW \qquad (4 - 3)$$

für $W \leq E$. Dabei ist $\zeta = -\phi_A$ die Fermienergie, k die Boltzmannkonstante, T die Temperatur der Spitze,

$$c := \frac{4\sqrt{2m\phi_A^3}}{3\hbar eF} \cdot v\left(\sqrt{\frac{e^3F}{4\pi\varepsilon_0}}\Big/\phi_A\right),$$
$$d := \hbar eF \Big/ \left[2\sqrt{2m\phi_A} \cdot t\left(\sqrt{\frac{e^3F}{4\pi\varepsilon_0}}\Big/\phi_A\right)\right]. \qquad (4 - 4)$$

v, t, F, Φ_A haben dieselbe Bedeutung wie in (2 - 1) und (2 - 2). Weiter sind so niedrige Temperaturen vorausgesetzt, daß $\frac{|W-\xi|}{\Phi_A} \ll 1$ gilt.

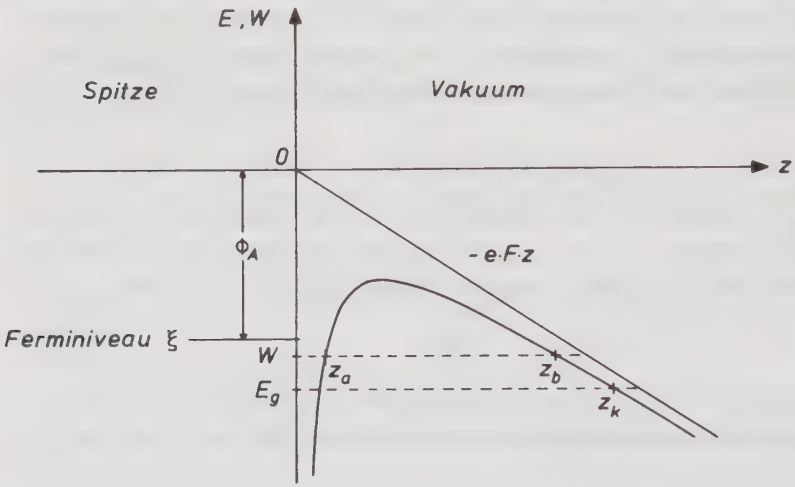

Abb. 10: Schematische Darstellung des eindimensionalen Potentials V(z) in der Nähe der Spitzenoberfläche.

Im Bereich $z_a < z < z_b$ ist $W - V(z) \leq E - V(z) < 0$, so daß die Elektronen dort nur wellenmechanisch beschrieben werden können. Für $z \geq z_b$ ist $W - V(z) \geq 0$, so daß dort die klassische Näherung sinnvoll ist. z_b sei dabei gerade so definiert, daß $W - V(z_b) = 0$.

In der klassischen Näherung wird daher ein Elektron mit Gesamtenergie E und Normalenergie W in der Ebene $z = z_b(W)$ starten mit Normalgeschwindigkeit $v_z = 0$ und Tangentialgeschwindigkeit

$$v_t = \sqrt{\frac{2}{m}(E - W)} \quad .$$

Diese Vorstellung erscheint angebracht, wenn die Abbildung eines Punktes der Spitzenoberfläche untersucht werden soll. Betrachtet man dagegen die Spitze einfach als flächenhafte Elektronenquelle, so ist es sinnvoll, im Abstand z_k eine „virtuelle Kathode" zu definieren. Dabei wird z_k so gewählt, daß

$$V(z_k) = E_g \qquad (4 - 5)$$

gilt. E_g sei dabei die niedrigste Energie, bei der überhaupt noch merklich Elektronen emittiert werden. Sie wird im folgenden genauer definiert.

Aus (4 - 3) folgt durch Integration über W von $-\infty$ bis E die Gesamtenergieverteilung

$$P(E)\,dE = \frac{4\pi m d}{h^3} \exp\left[-c - \frac{\xi}{d}\right] \frac{\exp\left[E/d\right]}{\exp\left[\frac{E-\xi}{kT}\right] + 1}\,dE \qquad (4 - 6)$$

Für $p := kT/d$ folgt daraus durch Integration über E von $-\infty$ bis $+\infty$ die Fowler-Nordheim-Gleichung

$$j = \frac{4\pi m d^2 e}{h^3} \exp\left[-c\right] \frac{\pi p}{\sin(\pi p)} \,. \qquad (4 - 7)$$

Diese Beziehung ist offenbar nur für $p < 1$ anwendbar, da für $p \to 1$ der Gültigkeitsbereich der zugrundeliegenden Näherungen, insbesondere der WKB-Näherung überschritten wird.

Wird nun E_g z.B. so gewählt, daß für 99% der Gesamtstromdichte $E > E_g$ gilt, so folgt aus (4 - 6) und (4 - 7) wegen $\exp\left[(E_g - \xi)/kT\right] \ll 1$:

$$E_g = \xi + d \cdot \ln(10^{-2} \frac{\pi p}{\sin(\pi p)}) \,. \qquad (4 - 8)$$

Für ein typisches Beispiel mit $\phi_A = 4.5$ eV, $F = 2.5\ 10^6$ V/mm, $T = 300$ K ergibt sich:

$$d = 0.11 \text{ eV}, \quad p = 0.23 \,,$$
$$E_g = \xi - 0.5 \text{ eV} = -5.0 \text{ eV}.$$

Für die virtuelle Kathode bei $z = z_k$ kann man nun eine Energie- und Winkelverteilungsfunktion angeben, wie es bei der thermischen Emission üblich ist. Dazu muß lediglich die Verteilung (4 - 3) für $P(E,W)\,dE\,dW$ in eine Verteilung für $\tilde{P}(U,\gamma)\,dU\,d\gamma$ umgerechnet werden, wobei U die kinetische Energie in der Ebene z_k und γ der Winkel des Geschwindigkeitsvektors gegen die Normale ist.

Die Transformationsbeziehungen zwischen E, W einerseits und U, γ andererseits lauten:

$$\begin{aligned} W &= U\cos^2\gamma + E_g \\ E &= U + E_g \\ dE\,dW &= 2U\sin\gamma\cos\gamma\,dU\,d\gamma \end{aligned} \qquad (4 - 9)$$

Damit erhält man als Energie- und Richtungsverteilung:

$$\tilde{P}(U,\gamma)\,dU\,d\gamma = \frac{8\pi m}{h^3}\,\frac{U\sin\gamma\cos\gamma}{\exp\left[\frac{U+E_g-\xi}{kT}\right]}\cdot\exp\left[-c + \frac{U\cos^2\gamma + E_g - \xi}{d}\right]dU\,d\gamma \,. \qquad (4 - 10)$$

5. Untersuchung eines Diodensystems

Als erstes Anwendungsbeispiel für das in 3.3 beschriebene Verfahren zur Potentialberechnung wurde ein Diodensystem untersucht, das von Teubner (1977) zur Beobachtung von Spitzen verschiedener Materialien und Orientierungen benutzt wurde.

5.1 Berechnung der Potentialverteilung

Form und Abmessungen des Systems sind Abb. 11 zu entnehmen:

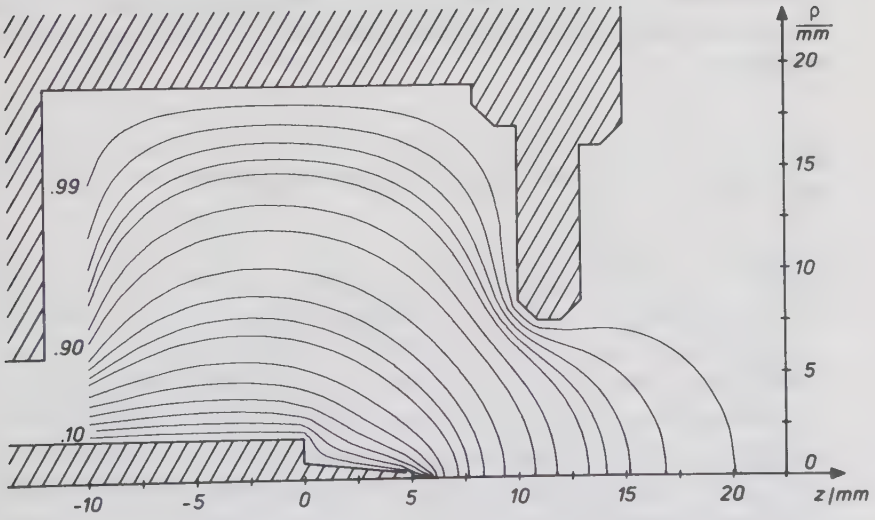

Abb. 11: Äquipotentiallinien in dem untersuchten Diodensystem für eine Potentialdifferenz 1 zwischen Kathode und Anode.

Die Spitze befindet sich bei z_s = 6 mm, ihr Abstand von der Vorderkante der Anode beträgt 4 mm, der Durchmesser der

Anodenbohrung beträgt 15 mm. Die Registrierebene für die Elektronen befindet sich in 60 mm Abstand von der Anode und liegt auf Anodenpotential.

Für die Rechnung nach dem Differenzenverfahren wurden zwei Maschennetze verwendet. Ein grobes Netz der Maschenweite 1 mm überdeckt das ganze System, während für den Bereich $0 \leq z \leq 16$ mm, $0 \leq \varrho \leq 12$ mm ein feines Netz der Maschenweite 0.2 mm benutzt wurde. Das Gebiet G_a für die analytische Lösung erstreckte sich über den Bereich 5 mm $\leq z \leq 7$ mm, $0 \leq \varrho \leq 1$ mm. Die Rechnungen wurden für einen Kegelwinkel $\alpha = 5^0$ und die Kugelradien a = 30 nm, 40 nm, 50 nm und 75 nm durchgeführt. Es wurden N_a = 20 Terme in (3 - 49) berücksichtigt. Für eine Iterationsschranke von $\delta = 10^{-8}$ waren etwa 30 Gesamtiterationen notwendig. Die Spitze hatte dabei das Potential 0, die Anode das Potential 1.

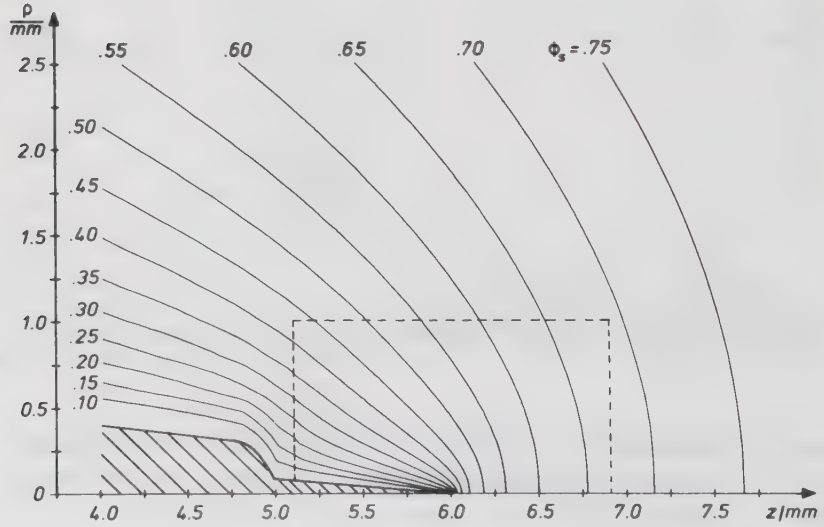

Abb. 12: Äquipotentiallinien im Diodensystem, Übergangsbereich zwischen analytischer und numerischer Lösung.

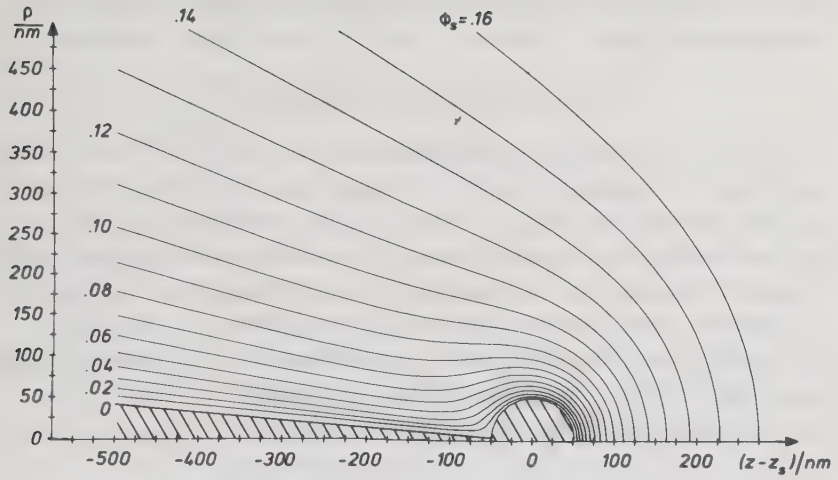

Abb. 13: Äquipotentiallinien in der Umgebung der Sphere-on-Cone-Konfiguration des Diodensystems.

Abb. 11 zeigt eine Auswahl von Äquipotentialflächen in diesem System. Abb. 12 zeigt Äquipotentialflächen in einem Ausschnitt von 4 mm $\leq z \leq$ 8 mm, $0 \leq \varrho \leq$ 2.5 mm. Hier ist außerdem die Grenze eingezeichnet, bis zu der bei der Berechnung der Potentialflächen das analytische Feld benutzt wurde. Außerhalb dieses Gebiets wurde hier eine einfache 4-Punkte-Interpolationsformel für die Berechnung der Äquipotentiallinien benutzt, was deren unregelmäßigen Verlauf in der Nähe des Spitzenschaftes erklärt. Da die Genauigkeit der Interpolation in diesem Bereich nur geringen Einfluß auf den Verlauf der Elektronenbahnen hat, wurde nicht versucht, dort die Feldinterpolation zu verbessern. Abb. 13 zeigt einige Äquipotentialflächen in unmittelbarer Umgebung der Sphere-on-Cone-Konfiguration, die als mögliche Spitzenkonturen in Frage kommen.

Es zeigte sich, daß die höheren Terme der Reihe (3 - 49) in unmittelbarer Umgebung der Spitze praktisch keinen Beitrag liefern, daß also

$$\phi\,(r,\vartheta) = A_1 \cdot f_1(r) \cdot P_{\nu_1}(\cos\vartheta) \qquad (5-1)$$

für $|r-a| \ll r_N$ eine gute Näherung für das Potential ist. Damit hängt in diesem Bereich das Potential in gleicher Weise von den Koordinaten ab, wie wenn bei der Rechnung nur ein Term berücksichtigt worden wäre. Die geometrische Gestalt der Potentialflächen ist in unmittelbarer Umgebung der Spitze also dieselbe, wie sie Wiesner (1970) erhalten hat, lediglich die zugehörigen Potentialwerte unterscheiden sich. Aus (5 - 1) folgt mit (3 - 50), daß eine Potentialfläche $\phi = \phi_S$, d.h. die Kathodenoberfläche, durch die Gleichung

$$\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_1} - \left(\frac{a}{r}\right)^{1+\nu_1}\right) P_{\nu_1}(\cos\vartheta) = \frac{\phi_S}{A_1}\left(\left(\frac{r_N}{a}\right)^{\nu_1} - \left(\frac{a}{r_N}\right)^{1+\nu_1}\right) =: \phi_L \qquad (5-2)$$

gegeben ist. Betrachtet man den Achsenschnittpunkt dieser Fläche bei $r = r_o$, $\vartheta = 0$, so folgt mit

$$\beta = r_o/a \qquad (5-3)$$

$$\phi_L = \left(\beta^{\nu_1} - \beta^{-1-\nu_1}\right) . \qquad (5-4)$$

Bei vorgegebenem α und damit ν_1 ist also bis auf einen Masstabsfaktor die Form der Potentialfläche $\phi = \phi_S$ durch die Angabe von β eindeutig bestimmt, unabhängig von den Werten von a, r_o, r_N, A_1 einzeln. Man kann daher die Form einer Spitze durch den „Formfaktor" β und den Kegelwinkel α, ihre Größe durch die Wahl von a charakterisieren, denn aus (5 - 3) und (2 - 7) folgt dann mit $\nu = \nu_1$ der Spitzenradius r_s. Bei Wiesner (1970) ist eine große Zahl von Äquipotentialflächen in Abhängigkeit von α und β dargestellt.

Hier wurde nicht versucht, durch geeignete Wahl von a, α und β eine ganz bestimmte Spitzenkontur optimal zu approximieren

- daß dies möglich ist, haben schon Dyke, Trolan, Dolan und Barnes (1953) gezeigt - sondern es wurden charakteristische, im Experiment vorkommende Formen untersucht. Abb. 14 zeigt die zu β = 1.2, 1.6, 2.0, 2.4 und 2.8 gehörenden Spitzen bei $\alpha = 5^{\circ}$. Es wurden hauptsächlich Spitzen mit β = 1.6 und β = 2.0 untersucht.

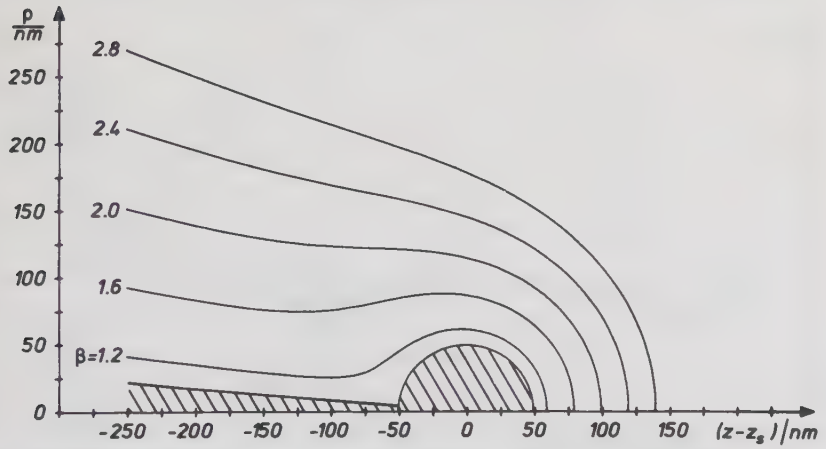

Abb. 14: Spitzenkonturen für verschiedene Formfaktoren β bei $\alpha = 5^{\circ}$.

Während die bisher berechnete Funktion $\phi(r,\vartheta)$ auf der Sphere-on-Cone-Konfiguration der Wert Null und auf der Anode den Wert Eins hat, hat das tatsächliche bei der Bahnberechnung verwendete Potential

$$V(r,\vartheta) = U\,\frac{\phi(r,\vartheta)\;\phi_s}{1-\phi_s} \approx U\,\frac{\phi(r,\vartheta) - A_1 f_1(\beta\alpha)}{1 - A_1 f_1(\beta\alpha)} \quad . \qquad (5-5)$$

auf der Kathode den Wert Null und auf der Anode den Wert 1.

$\phi_s = \phi(\beta \cdot a, 0) \approx A_1 \cdot f_1(\beta a)$ ist dabei der Wert der Funktion $\phi(r, \vartheta)$ auf der Spitze. Der zugehörige Krümmungsradius der Spitze r_s kann dann aus (2 - 7) oder direkt aus dem Verlauf der Potentialfläche V = O bestimmt werden. Statt β und a vorzugeben, kann man natürlich auch den Krümmungsradius r_s und a vorgeben. Man ermittelt dann aus (2 - 7) r_o und damit β und kann wieder (5 - 5) für die Potentialverteilung verwenden.

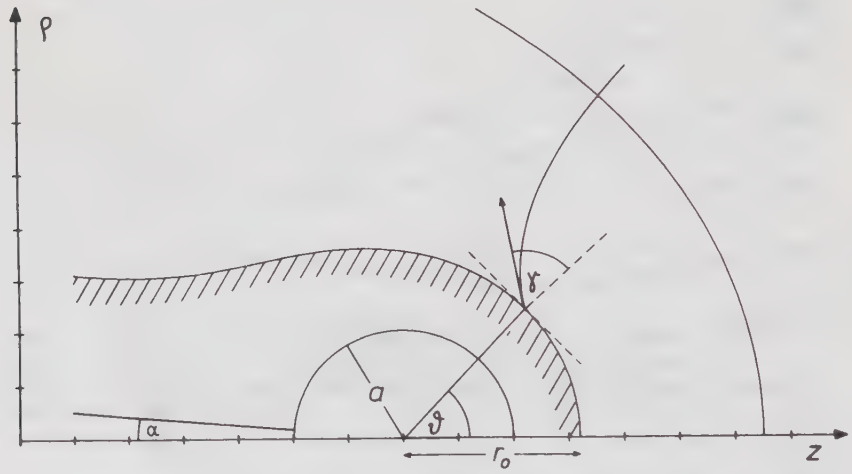

Abb. 15: Skizze zur Veranschaulichung der Charakterisierung von Punkten auf der Spitzenoberfläche und von Emissionsrichtungen durch die Winkel ϑ und γ.

Abb. 15 zeigt einen Meridianschnitt durch eine Spitze mit β = 1.6, $\alpha = 5^{\circ}$. Punkte auf der Spitzenoberfläche, in denen die Feldstärke berechnet wurde oder die als Startpunkte für Elektronenbahnen dienten, werden durch den Winkel ϑ gekennzeichnet, den ihr Ortsvektor mit der z-Achse bildet. Die Startrichtung von Meridionalbahnen wird durch den Winkel γ charakterisiert, den der Vektor der Startgeschwindigkeit mit der Oberflächennormale bildet.

5.2 Feldstärke an der Spitzenoberfläche

Als erstes wurde die Feldstärke an der Spitzenoberfläche berechnet. Aus den vorliegenden Potentialverteilungen konnte sie in jedem Punkt der Spitzenoberfläche in Abhängigkeit vom Spitzenradius r_s und von der Spitzenform, gekennzeichnet durch den Formfaktor β , berechnet werden. Die Kurven b und d in Abb. 16 zeigen den Verlauf der Feldstärke F entlang

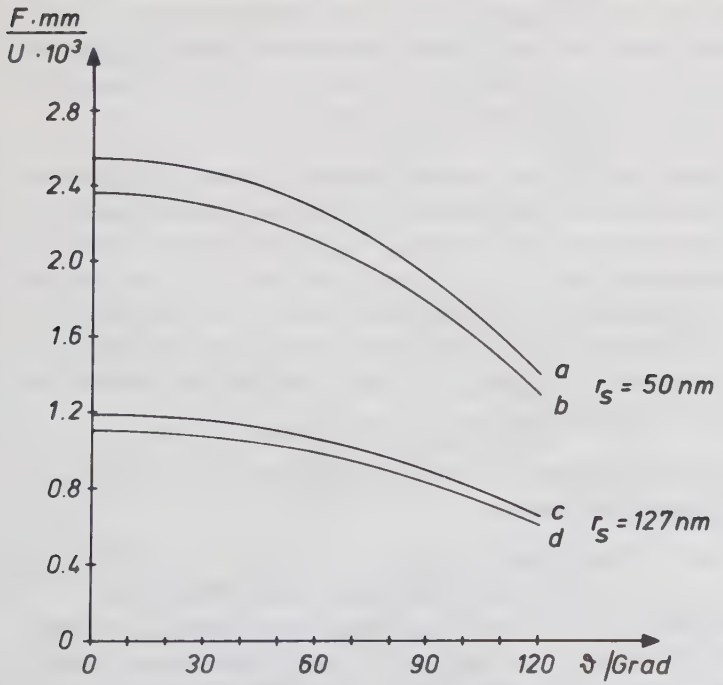

Abb. 16: Verlauf der Feldstärke F längs der Spitzenoberfläche für verschiedene Krümmungsradien r_s unter Verwendung von N_a = 20 (b,d) und N_a = 1 (a,c) Termen.

der Spitzenoberfläche als Funktion des den jeweiligen Aufpunkt kennzeichnenden Winkels ϑ für die beiden Spitzenradien r_s = 50 nm und 127 nm. Beide Spitzen hatten dieselbe Form, nämlich β = 1.6 .

Der Einfluß der Berücksichtigung der tatsächlichen Elektrodenform zeigt sich im Vergleich mit den Kurven a und c. Diese gehören nämlich zu einer Lösung der Form (3 - 49) mit N_a = 1, deren Koeffizient A_1 so bestimmt wurde, daß beide Lösungen auf der Achse bei z = 10 mm übereinstimmten. Wie erwartet erhält man auf diese Weise höhere Werte für die Feldstärke, denn die zugehörige Potentialfläche mit Anodenpotential verläuft in wesentlich geringerer Entfernung von der Spitze als die tatsächliche Anode.

Weiter wurde der Verlauf der Feldstärke an der Spitzenoberfläche bei gleichem Spitzenradius r_s, aber verschiedener Spitzenform untersucht. In Abb. 17 ist für r_s = 84.6 nm und die Formfaktoren β = 1.12, 1.60, 1.94 und 2.46 das Verhältnis der Feldstärke $F(\vartheta)$ zum Maximalwert F(0) aufgetragen. Wegen der aus Abb. 14 ersichtlichen zunehmenden Verrundung der Spitzen mit wachsendem β nimmt auch der Feldstärkeabfall für große ϑ mit wachsendem β zu.

Müller (1960) und Gomer (1961) machen für die Feldstärke F an der Spitze den Ansatz

$$F = k \cdot U/r_s \qquad (5 - 6)$$

und empfehlen k = 0.2. Berücksichtigt man wieder, daß von (3 - 49) für $r \ll r_N$ nur der erste Term einen wesentlichen Beitrag liefert, so erhält man für die Feldstärke am Scheitelpunkt einer Spitze mit Formfaktor β :

$$F = \frac{U A_1^*}{r_0 (1 - \phi_s)} \left(\nu_1 \beta^{\nu_1} + (1 + \nu_1) \beta^{1-\nu_1} \right) , \qquad (5 - 7)$$

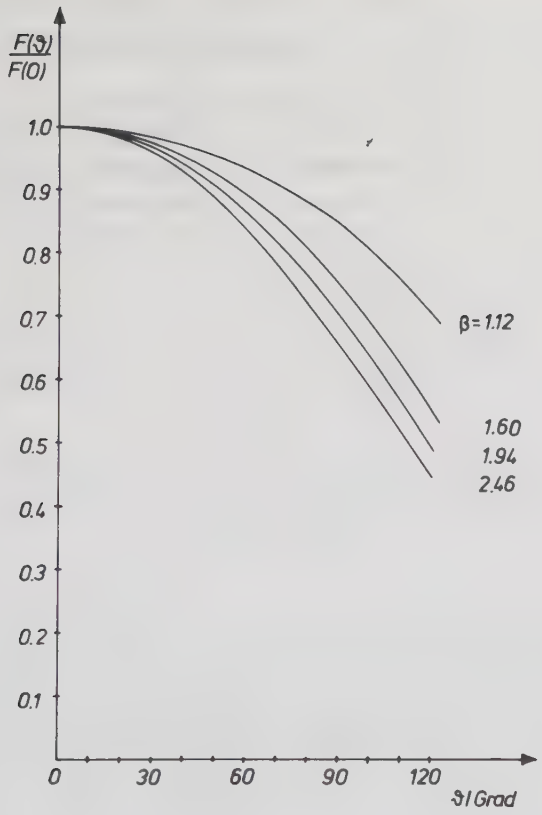

Abb. 17: Relativer Feldstärkenabfall längs der Spitzenoberfläche für verschiedene Formfaktoren .

mit $$A_1^* = A_1 / \left((\frac{r_N}{a})^{\nu_1} - (\frac{a}{r_N})^{1+\nu_1} \right) .$$ (5 - 8)

Mit (2 - 7), (5 - 2) - (5 - 4) läßt sich (5 - 7) auf die Form (5 - 6) bringen und man erhält

$$k = 2\left[\frac{\beta^{1+\nu_1}}{A_1^*} + 1 - \beta^{1+2\nu_1}\right]^{-1} \cdot \frac{(1+\nu_1+\nu_1\beta^{1+2\nu_1})^2}{(2+\nu_1)(1+\nu_1)+\nu_1(1-\nu_1)\beta^{1+2\nu_1}} \quad (5-9)$$

Danach hängt der Faktor k bei gleicher Spitzenform, d.h. konstanten β und ν_1, nur noch durch A_1^* von Form und Abmessungen des Systems ab. Für einige der untersuchten Spitzen sind die Werte in Tabelle 2 angegeben. Zum Vergleich wurden auch noch die nach (2 - 3) und (2 - 5) definierten Faktoren

$$k_H = 2/\ln\left(\frac{4d}{r_s}\right) \quad (5-10)$$

und

$$k_P = 2/\ln\left(\frac{2d}{r_s}\right) \quad (5-11)$$

berechnet. Für d wurde dabei die kürzeste Entfernung d = 8.5mm zwischen Spitze und Anode gewählt.

Tabelle 2:

a/nm	A_1^*	β	r_s/nm	k	k_H	k_P
30	0.126	1.6	50.7	0.120	0.149	0.157
		2.0	65.8	0.105	0.152	0.160
40	0.132	1.6	67.7	0.126	0.152	0.161
		2.0	87.7	0.110	0.155	0.164
50	0.137	1.6	84.6	0.131	0.155	0.164
		2.0	109.6	0.115	0.158	0.167
75	0.146	1.6	126.8	0.140	0.160	0.169
		2.0	164.5	0.123	0.163	0.173

5.3 Bahnberechnung

Die Lorentzsche Bewegungsgleichung für ein Elektron der Ruhmasse m_o und der Ladung -e in einem elektrostatischen Feld $E = -\text{grad } V(\vec{r})$ lautet:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = e \text{ grad } V(\vec{r}) \quad ; \qquad (5 - 12)$$

Dabei ist

$$m = m_o / \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (5 - 13)$$

die relativistische Masse des Elektrons. Normiert man die potentielle Energie V so, daß der relativistische Energiesatz die Form

$$(m - m_o)\, c^2 = e \cdot V \qquad (5 - 14)$$

annimmt, so folgt

$$m/m_o = 1 + 2\,\alpha\, V \qquad (5 - 15)$$

mit

$$\alpha = \frac{e}{2m_o c^2} = 0.9784671 \cdot 10^{-6}/\text{Volt} \quad . \qquad (5 - 16)$$

Zur Vereinfachung von (5 - 12) ist es zweckmäßig, die Zeit t durch eine Variable τ zu ersetzen, gemäß

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{2e\,U^*}{m_o}} \cdot \frac{m_o}{m} \quad . \qquad (5 - 17)$$

τ ist also bis auf einen konstanten Faktor mit der relativistischen Eigenzeit des Elektrons identisch.

Aus (5 - 12) wird dann

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = \frac{1}{2U^*} \cdot \text{grad } V^*(\vec{r}) \quad . \qquad (5 - 18)$$

Dabei ist

$$V^*(\vec{r}) = V(\vec{r}) \cdot (1 + \alpha\, V(\vec{r})) \qquad (5 - 19)$$

das relativistisch korrigierte Potential; U^* ist eine Konstante, über die noch verfügt werden kann. Eine sinnvolle Wahl ist

$U^* = U(1 + \alpha U)$, wobei U der Wert des Potentials für große z ist, also in der Regel des Anodenpotentials. τ hat dann die Dimension einer Länge.

Aus (5 - 18) folgt durch Integration

$$\left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right)^2 = \frac{m^2}{m_o^2} \cdot \frac{m_o}{2e\,U^*} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \frac{\vec{p}^2}{2em_o\,U^*} = \frac{V^*}{U^*} \quad , \qquad (5 - 20)$$

Aus der Beziehung (5 - 20) erhält man die Anfangswerte von $\left|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right|$ als Funktion der kinetischen Anfangsenergie E_o, wenn man gemäß (5 - 14) $V = E_o/e$ einsetzt. Ferner folgt bei obiger Wahl von U^*, daß im feldfreien Raum nach Durchlaufen der Beschleunigungsstrecke, wo V = U ist, $\left|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right| = 1$ gilt, also τ die Bogenlänge längs der Bahn ist.

Im vorliegenden System beträgt die Potentialdifferenz zwischen Spitze und Anode nie mehr als einige Kilovolt, so daß es genügt, den nichtrelativistischen Grenzfall der obigen Gleichungen zu betrachten:

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = \frac{1}{2U} \cdot \operatorname{grad} V(\vec{r}) \quad , \qquad (5 - 22)$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right)^2 = \frac{V}{U} \quad , \qquad (5 - 23)$$

und die Variable τ ist dann durch

$$\tau = \sqrt{\frac{2eU}{m_o}} \cdot t = v_\infty \cdot t \qquad (5 - 24)$$

mit der Zeit t verknüpft.

Bei den Rechnungen mit Spitzen verschiedener Form und Größe wurde U stets so gewählt, daß die maximale Feldstärke am Scheitelpunkt der Spitze $5 \cdot 10^6$ V/mm betrug. Dies erschien sinnvoll, da dann bei allen Spitzen vergleichbare Emissionsverhältnisse vorliegen.

Bei der Berechnung von Meridionalbahnen, d.h. in einer durch die Achse gehenden Ebene verlaufenden Bahnen, hat der Vektor $\vec{r}$ nur zwei kartesische Komponenten ϱ, z. Das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung der Dimension 2 (5 - 22) wurde zur numerischen Lösung in das System 1. Ordnung der Dimension 4

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{u} \quad , \qquad \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{1}{2U} \cdot \text{grad } V(\vec{r}) \qquad (5 - 25)$$

umgeschrieben. Dieses Differentialgleichungssystem wurde mit Hilfe von Hammings modifiziertem Prediktor-Korrektor-Verfahren gelöst, das bei Ralston und Wilf (1972) beschrieben wird.

Bei dem Verfahren handelt es sich um ein Mehrschrittverfahren, das für einen Integrationsschritt Funktionswerte und Ableitungen an vier vorhergehenden äquidistanten Stellen der unabhängigen Variablen benutzt. Es hat einen Abbruchfehler der Ordnung h^6. Die notwendige Anlaufrechnung wird mit einer Runge-Kutta-Methode 4. Ordnung durchgeführt.

Die Differenz zwischen Prediktor und Korrektor dient als Fehlermaß, mit dem bei Vorgabe einer Fehlerschranke eine etwaige Verdoppelung oder Halbierung der Schrittweite gesteuert wird. Das Verfahren benötigt pro Integrationsschritt zwei Feldstärkenberechnungen: einmal wenn für $\vec{r}$ der aus dem Prediktor folgende Wert eingesetzt wird und ein zweites Mal mit dem endgültigen neuen Wert für $\vec{r}$. Dabei hat sich gezeigt, daß bei Rechnung mit kleiner Fehlerschranke, also kleiner Differenz zwischen Prediktor und Korrektor, auch gute Ergebnisse erzielt werden, wenn auf die zweite Feldstärkenberechnung verzichtet wird. Dadurch wird die Rechenzeit erheblich reduziert.

Weiter hat es sich als notwendig erwiesen, für die Bahnberechnung den Koordinatenursprung in den Spitzenmittelpunkt zu legen, da sonst bei der Umrechnung auf die Polarkoordinaten des analytischen Feldes ein Genauigkeitsverlust von mehreren Dezimalen auftreten konnte.

Zunächst wurden die Bahnen von Elektronen berechnet, die an verschiedenen Stellen der Spitzenoberfläche mit verschwindender kinetischer Energie starten. Jede von ihnen stellt den Hauptstrahl eines von einem emittierenden Punkt ausgehenden Strahlbündels dar. Von diesen Bahnen interessieren die Durchstoßpunkte durch die Registrierebene und die Bahnsteigung in diesen Punkten.

In Abb. 18 ist für zwei Spitzen mit demselben Formfaktor $\beta = 1.6$, aber mit verschiedenen Radien $r_s = 50$ nm und 127 nm

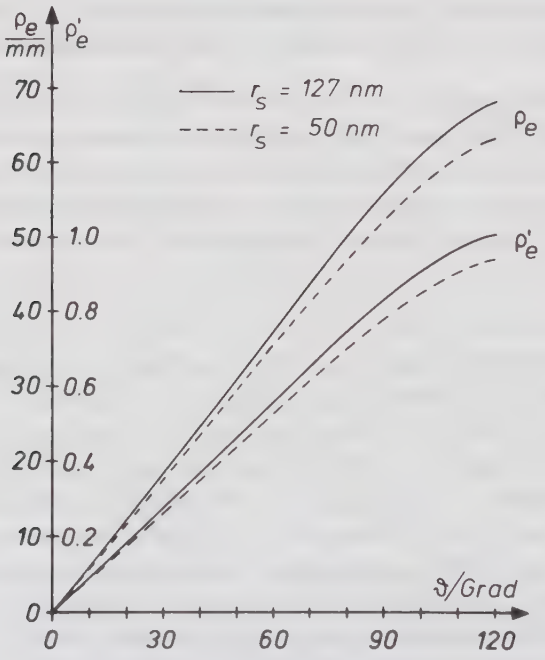

Abb. 18: Achsenabstand ϱ_e und Steigung ϱ'_e in der Registrierebene als Funktion von ϑ für Bahnen mit $E_o = 0$, bei $\beta = 1.6$, $r_s = 50$ nm und $r_s = 127$ nm.

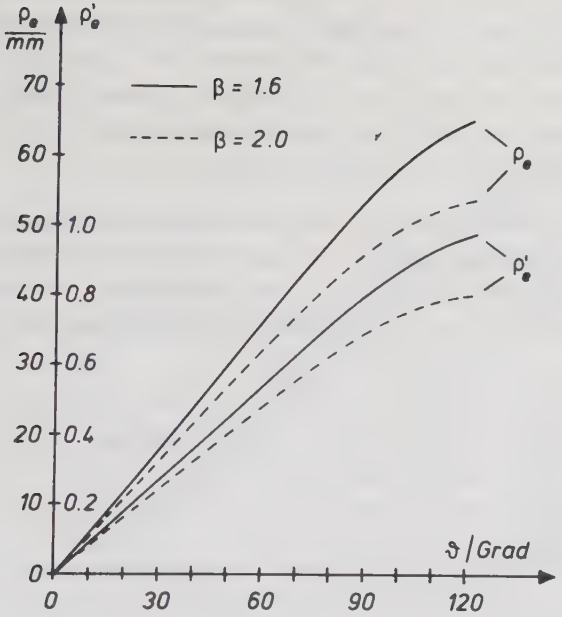

Abb. 19: Achsenabstand ϱ_e und Steigung ϱ'_e in der Registrierebene als Funktion von ϑ für Bahnen mit $E_o = 0$, bei $r_s = 84.6$ nm, $\beta = 1.6$ und $\beta = 1.94$.

der Achsenabstand ϱ_e und die Bahnsteigung ϱ'_e in der Registrierebene als Funktion des Winkels ϑ aufgetragen. In Abb. 19 ist dasselbe für zwei Spitzen mit gleichem Radius $r_s = 84.6$ nm, aber verschiedenen Formfaktoren $\beta = 1.6$ und 1.94 dargestellt.

Auffallend ist der bis zu Werten von $\vartheta \approx 80^\circ$ praktisch lineare Verlauf der Kurven. Dies ist auf ein Zusammenwirken der Feldteile im Bereich der Spitze und im Bereich der Anode zurückzuführen. Während der Rechnung kann man nämlich verfolgen, daß die Bahnsteigung im Bereich der Anode als Funktion der axialen Koordinate z ein Minimum durchläuft.

Weiter ist ersichtlich, daß der größere Spitzenradius r_s bei gleicher Form β auch zu größeren Achsenabständen ϱ_e führt, daß andererseits ein größerer Formfaktor β , d.h. eine Spitze ohne Einsattelung, kleinere Achsenabstände ϱ_e zur Folge hat. Außerdem endet der lineare Bereich bei Spitzen mit größerem β schon bei kleineren Werten von ϑ .

Um den Einfluß einer von Null verschiedenen Startenergie abzuschätzen, wurden nun Bahnen mit verschiedener Startenergie und mit verschiedenen Startrichtungen berechnet. Zunächst wurde festgestellt, daß bei konstanter Startenergie die Bah-

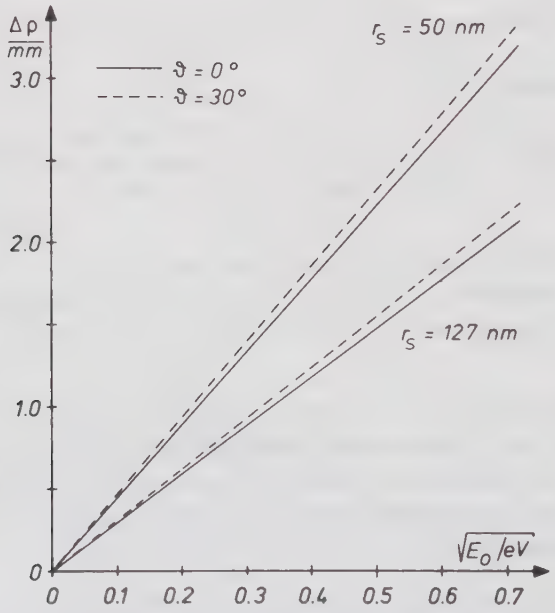

Abb. 20: Abweichung $\Delta\varrho$ des Achsenabstandes in der Registrierebene von Bahnen mit $\gamma = 90^\circ$ und $\gamma = 0^\circ$ als Funktion der Anfangsenergie E_0 für $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 30^\circ$ bei $\beta = 1.6$, $r_s = 50$ nm und $r_s = 127$nm.

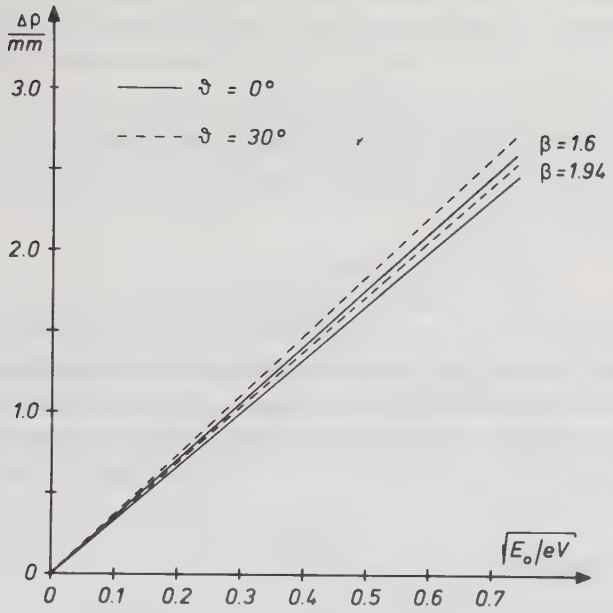

Abb. 21: Abweichung $\Delta\varrho$ des Achsenabstandes in der Registrierebene von Bahnen mit $\gamma = 90^{\circ}$ und $\gamma = 0^{\circ}$ als Funktion der Anfangsenergie E_o für $\vartheta = 0^{\circ}$ und $\vartheta = 30^{\circ}$ bei $r_s = 84.6$ nm, $\beta = 1.6$ und $\beta = 1.94$.

nen mit $\gamma = \pm 90^{\circ}$ die größte Abweichung von den Bahnen mit $\gamma = 0^{\circ}$ zeigten. Da außerdem auch die in Abschnitt 4 angestellte Betrachtung nahelegt, in diesem Fall Bahnen mit endlicher Startenergie tangential zur Oberfläche starten zu lassen, soll die Abweichung $\Delta\varrho$ des Achsenabstandes der Bahnen mit $\gamma = 90^{\circ}$ von den Bahnen mit $\gamma = 0^{\circ}$ als Maß für den Einfluß der Startenergie dienen. In Abb. 20 ist $\Delta\varrho$ als Funktion der Wurzel aus der Anfangsenergie aufgetragen für zwei Spitzen gleicher Form ($\beta = 1.6$) aber mit verschiedenen Radien und zwar sowohl für den Achsenpunkt als auch für einen außeraxia-

len Punkt bei $\vartheta = 30^{\circ}$. In Abb. 21 ist dasselbe für zwei Spitzen mit gleichem Radius, aber verschiedener Form dargestellt.

Man erhält in dem betrachteten Energiebereich bis 0.5 eV, der nach (4 - 8) ausreichend erscheint, einen linearen Zusammenhang zwischen $\Delta\varphi$ und $\sqrt{E_o}$. Definiert man einen Koeffizienten C_E folgendermaßen:

$$\Delta\varphi = C_E \cdot \sqrt{E_o} \quad , \qquad (5 - 26)$$

so erhält man für C_E im vorliegenden Fall die in Tabelle 3 angegebenen Werte. Mit zunehmendem Spitzenradius und zunehmender Verrundung der Spitze nimmt C_E ab, wobei sich die Verrundung weniger stark auswirkt als eine Veränderung des Spitzenradius.

Tabelle 3

r_s/nm	β	$C_E \cdot \frac{mm}{eV}$ bei $\vartheta = 0^{\circ}$	$C_E \cdot \frac{mm}{eV}$ bei $\vartheta = 30^{\circ}$
50	1.6	4.46	4.63
127	1.6	2.95	3.08
84.6	1.6	3.54	3.69
84.6	1.94	3.36	3.46

6. Untersuchung eines Triodensystems

Als weiteres Anwendungsbeispiel für das in 3.3 beschriebene Verfahren zur Potentialberechnung wurde ein Triodensystem untersucht, an dem Speidel und Kurz (1977) Messungen der Quellenlage und -größe sowie des Achsenrichtstrahlwerts durchgeführt haben.

6.1 Berechnung der Potentialverteilung

Form und Abmessungen des Systems sind in Abb. 22 dargestellt. Der Kathodenraum wurde nach außen in gleicher Weise abgeschlossen wie bei dem Diodensystem in Abb. 11. Außer für den eingezeichneten Abstand von d = 4.7 mm zwischen Spitze und Vorderkante der ersten Anode wurden auch noch Rechnungen für d = 3.6 mm und d = 2.0 mm durchgeführt.

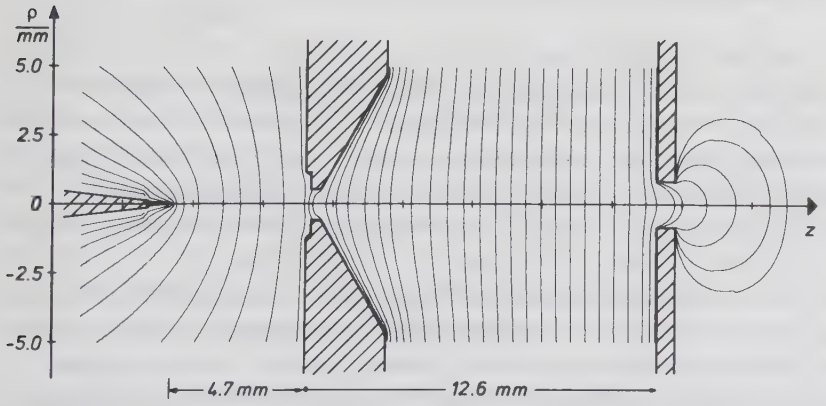

Abb. 22: Äquipotentiallinien in dem untersuchten Triodensystem.

Bei einer Triodenanordnung kann wegen der Linearität der Laplace-Gleichung die Potentialverteilung für beliebige Potentialwerte auf den einzelnen Elektroden als Linearkombination von zwei speziellen Lösungen $\phi_1(\varrho,z)$ und $\phi_2(\varrho,z)$ dargestellt werden. Sind nämlich $\phi_1(\varrho,z)$ und $\phi_2(\varrho,z)$ Lösungen der Laplace-Gleichung mit den Randbedingungen

$\phi_1 = 0$ auf der Spitze und ihrer Halterung,
$\phi_1 = 1$ auf den beiden Anoden,
$\phi_2 = 0$ auf der Spitze und der 1. Anode,
$\phi_2 = 1$ auf der 2. Anode,

so ist

$$V(\varrho,z) = U_s \cdot \phi_1(\varrho,z) + (U_b - U_s) \cdot \phi_2(\varrho,z)$$
$$= U_s \cdot \left[\phi_1(\varrho,z) + (\varkappa - 1) \cdot \phi_2(\varrho,z)\right] \qquad (6-1)$$

mit

$$\varkappa = U_b/U_s \qquad (6-2)$$

die Potentialverteilung mit den Potentialen U_s („Saugspannung") bzw. U_b („Beschleunigungsspannung") auf der ersten bzw. zweiten Anode und Potential Null auf der Spitze.

Die Lösung $\phi_1(\varrho,z)$ wurde genau wie im Fall des Diodensystems nach dem in 3.3 beschriebenen Verfahren gewonnen. Das Gebiet G_a mit der analytischen Lösung erstreckte sich in der ϱ,z-Ebene wieder über ein Quadrat der Seitenlänge 2 mm um die Spitze herum; im Ansatz (3 -49) wurden $N_a = 24$ Terme benutzt. Als Kegelwinkel wurde $\alpha = 5^\circ$, als Kugelradius a = 50 nm gewählt.

Für die Rechnung nach dem Differenzenverfahren wurde ein grobes Maschennetz der Maschenweite 0.2 mm benutzt, das sich über das gesamte System erstreckte, sowie jeweils feine Maschennetze der Maschenweite 0.05 mm im Bereich der beiden Anodenbohrungen mit 0.5 mm Radius bei der ersten Anode und 0.85 mm Radius bei der zweiten. Bei den betrachteten Spitzenabständen d konnte für $\phi_2(\varrho,z)$ im Kathodenraum die vereinfachte Randbedingung eines asymptotisch feldfreien Raumes auf Potential

Null benutzt werden, da sich zeigte, daß der Durchgriff der zweiten Anode im Bereich der Spitze vernachlässigbar war. Die Lösung Φ_2 konnte daher ganz nach dem Differenzenverfahren gewonnen werden. In Abb. 22 sind einige Äquipotentialflächen der berechneten Potentialverteilung eingezeichnet.

Die Tatsache, daß das Beschleunigungsfeld zwischen der ersten und zweiten Anode in den Kathodenraum kaum durchgreift, ermöglicht die im folgenden Absatz 6.2 vor Beginn einer genaueren Rechnung durchgeführte Näherung. Diese besteht im wesentlichen darin, daß man das Gesamtsystem in zwei Teilsysteme zerlegt, nämlich das Emissionssystem zwischen Kathode und erster Anode und das Beschleunigungssystem zwischen erster und zweiter Anode. Die elektronenoptischen Eigenschaften beider Teilsysteme können dann näherungsweise getrennt voneinander behandelt werden.

6.2 Kardinalelemente und Fehlerkoeffizienten des Beschleunigungssystems

Zunächst wurden die elektronenoptischen Eigenschaften des Beschleunigungssystems allein untersucht. Das gesamte Strahlerzeugungssystem läßt sich dann in der Näherung beschreiben, daß eine vom Emissionssystem erzeugte virtuelle Elektronenquelle durch das Beschleunigungssystem abgebildet wird. Derartige Untersuchungen sind für Systeme ähnlicher Gestalt z.B. von Munro (1972) und Tonomura (1973) durchgeführt worden, allerdings für andere Abmessungen.

Die Potentialverteilung im Beschleunigungssystem ergibt sich einfach zu

$$V(\varrho, z) = U_s \, (1 + (\varkappa - 1) \cdot \Phi_2(\varrho, z)) \, , \qquad (6 - 3)$$

wenn für Φ_2 die in 6.1 angegebenen vereinfachten Randbe-

dingungen im Kathodenraum gewählt werden. Dabei ist $\varkappa$ das in (6 - 2) definierte Spannungsverhältnis und U_s bzw. U_b die Potentiale der ersten bzw. zweiten Anode.

Beachtet man, daß z.B. nach Glaser (1952 a) im rein elektrostatischen Fall für den elektronenoptischen Brechungsindex

$$n \sim \sqrt{V^*(\vec{r})} \qquad (6 - 4)$$

gilt, so folgt mit (6 - 3) schon aus dem Fermatschen Prinzip für Elektronenbahnen

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} n \, ds \sim \delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{V^*(\vec{r})} \, ds \quad , \qquad (6 - 5)$$

daß im nichtrelativistischen Grenzfall die Elektronenbahnen und damit die elektronenoptischen Eigenschaften des Systems nicht von U_s und U_b einzeln, sondern nur vom Verhältnis $\varkappa = U_b/U_s$ abhängen.

Da beim Betrieb des Systems U_s stets einige Kilovolt beträgt, lassen sich seine elektronenoptischen Eigenschaften durch die paraxialen Kenngrößen und durch Fehlerkoeffizienten beschreiben, die man aus der Berechnung einiger fundamentaler Paraxialbahnen und aus Bildfehlerintegralen erhält.

Die Bahngleichung für paraxiale Meridionalbahnen in einem rein elektrostatischen Feld lautet

$$r'' + \frac{r'}{2} \cdot \frac{V^{*\prime}}{V^*} + \frac{r}{4} \left(\frac{V^{*\prime\prime} - 2\alpha V'^2}{V^*} \right) = 0 \quad , \qquad (6 - 6)$$

oder im nichtrelativistischen Grenzfall

$$r'' + \frac{r'}{2} \cdot \frac{V'}{V} + \frac{r}{4} \cdot \frac{V''}{V} = 0 \quad . \qquad (6 - 7)$$

Dabei ist $V(z) := V(0,z)$ die Potentialverteilung auf der Achse, α ist in (5 - 16) definiert und * bedeutet wieder die rela-

tivistische Korrektur (5 - 19); r ist der Achsenabstand der Bahn; ' bedeutet Ableitung nach z.

Für die Lösung von (6 - 6) ist es vorteilhaft, die Transformation

$$r(z) = \left[V^*(z_o)/V^*(z)\right]^{\frac{1}{4}} \cdot \varrho(z) \qquad (6 - 8)$$

durchzuführen. Dabei ist $z = z_o$ eine beliebige feste Ebene. Durch Differentiation von (6 - 8) folgt

$$r'(z) = \left[V^*(z_o)/V^*(z)\right]^{\frac{1}{4}} \left(\varrho'(z) - \frac{1}{4} \cdot \frac{V^{*\prime}(z)}{V^*(z)} \cdot \varrho(z) \right) . \qquad (6 - 9)$$

Für ϱ erhält man dann die Differentialgleichung

$$\varrho''(z) + \varrho(z) \left[(V^{*\prime 2} + 2\, V'^2)/16\, V^{*2} \right] = 0 \quad , \qquad (6 - 10)$$

die ϱ' und $V^{*\prime}$ nicht mehr enthält. Im nichtrelativistischen Grenzfall ergibt sich

$$\varrho'' + \frac{3}{16} \cdot G^2(z) \cdot \varrho = 0 \qquad (6 - 11)$$

mit $$G(z) = \frac{V'(z)}{V(z)} = \frac{(\varkappa - 1)\, \frac{\partial \phi_2}{\partial z}\Big|_{z=0}}{1 + (\varkappa - 1) \cdot \phi_2(0,z)} \cdot \qquad (6 - 12)$$

Auch hier zeigt sich, daß in der Bahngleichung nicht mehr U_s und U_b einzeln auftreten, sondern nur noch ihr Verhältnis $\varkappa$. Kontrollrechnungen haben ergeben, daß bei den hier auftretenden Spannungen von etwa 50 kV die Verwendung der nichtrelativistischen Näherung (6 - 11) ausreicht.

Mit Hilfe der Lösungen $s_1(z)$ und $s_2(z)$ von (6 - 7) mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} s_1(-\infty) &= 1 \quad , \quad s_1'(-\infty) = 0 \quad , \\ s_2(+\infty) &= 1 \quad , \quad s_2'(+\infty) = 0 \quad , \end{aligned} \qquad (6 - 13)$$

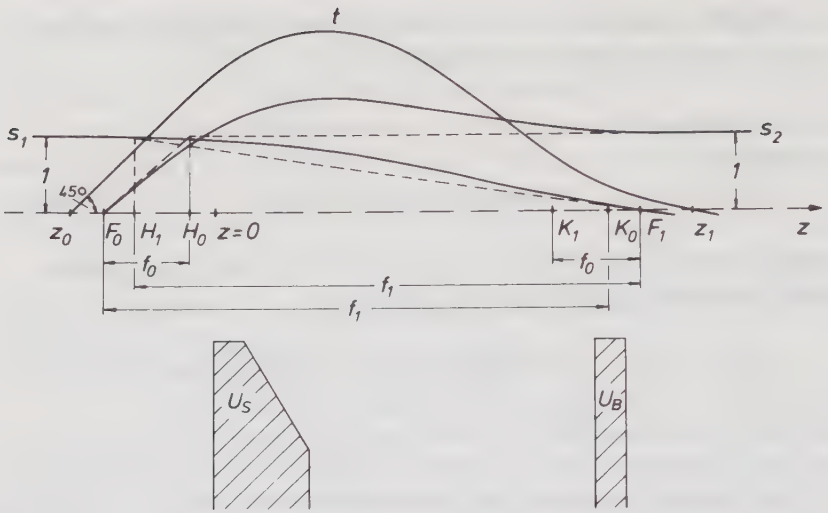

Abb. 23: Definition der Kardinalelemente.

die in Abb. 23 schematisch dargestellt sind, erhält man die Kardinalelemente des Systems:

objektseitiger	Brennpunkt	F_o	= Nullstelle von $s_2(z)$,
objektseitige	Brennweite	f_o	$= 1/s_2'(F_o)$,
objektseitige	Hauptebene	H_o	$= F_o + f_o$,
bildseitiger	Brennpunkt	F_1	= Nullstelle von $s_1(z)$,
bildseitige	Brennweite	f_1	$= -1/s_1'(F_1)$,
bildseitige	Hauptebene	H_1	$= F_1 - f_1$,
objektseitiger	Knotenpunkt	K_o	$= F_o + f_1$,
bildseitiger	Knotenpunkt	K_1	$= F_1 - f_o$.

(6 - 14)

Falls die Brennpunkte nicht im feldfreien Raum liegen, ist es sinnvoll, die asymptotischen Brennpunkte, Brennweiten, Hauptebenen und Knotenpunkte zu betrachten. Diese erhält man analog zu den Definitionen (6 - 14) aus den Achsenschnittpunkten und Steigungen der entsprechenden Bahnasymptoten.

In Abb. 24 sind die Kardinalelemente des Systems f_o, f_1, F_o, F_1, H_o, H_1, K_o und K_1 als Funktion von $\varkappa$ dargestellt. Als Ebene z = O wurde die Vorderebene der ersten Anode gewählt. Es zeigt sich, daß die Hauptebenen und Knotenpunkte ihre Lage mit $\varkappa$ nur wenig verändern. Für $\varkappa > 20$ ist nur noch eine geringe Abhängigkeit der Kardinalelemente von $\varkappa$ zu erkennen.

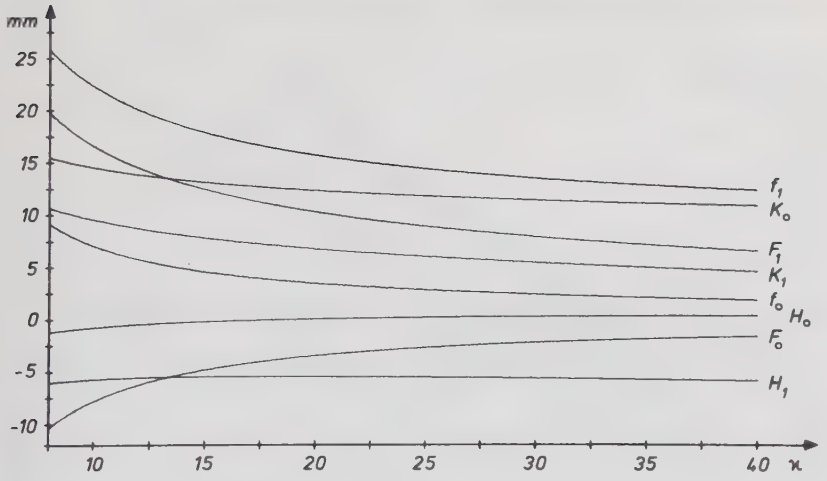

Abb. 24: Kardinalelemente des Beschleunigungssystems als Funktion des Spannungsverhältnisses $\varkappa$.

Soll eine spezielle Ebene $z = z_o$ durch das System abgebildet werden, so liefern die Bahnen s(z) und t(z) mit den Anfangsbedingungen

$$s(z_o) = 1 \quad , \quad s'(z_o) = O \quad ,$$
$$t(z_o) = O \quad , \quad t'(z_o) = 1 \qquad (6 - 15)$$

die Bildebene z_1 = Nullstelle von t(z),

die Angularvergrößerung $M_A = t'(z_1) = \left[\frac{V^*(z_o)}{V^*(z_1)}\right]^{\frac{1}{4}} \cdot \eta'(z_1)$,

die Lateralvergrößerung $M_L = s(z_1) = \left[\frac{V^*(z_o)}{V^*(z_1)}\right]^{\frac{1}{4}} \cdot \xi(z_1)$, (6 - 16)

wobei $\eta(z) = \left[V^*(z)/V^*(z_o)\right]^{\frac{1}{4}} \cdot t(z)$

und $\xi(z) = \left[V^*(z)/V(z_o)\right]^{\frac{1}{4}} \cdot s(z)$

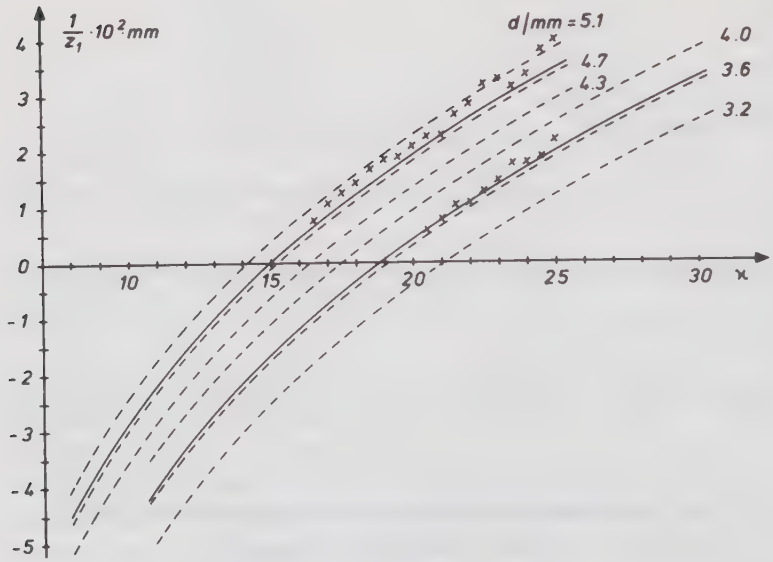

Abb. 25: Bildort z_1 als Funktion des Spannungsverhältnisses $\varkappa$ für 3.2 mm ≤ d ≤ 5.1 mm;
gestrichelt: Beschleunigungssystem allein, d entspricht dem Abstand der abgebildeten virtuellen Quelle,
ausgezogen: Gesamtsystem, d ist der Spitzenabstand,
Kreuze (x): Meßpunkte.

die s(z) und t(z) entsprechenden Lösungen von (6 - 10) sind. In dem in Abb. 23 skizzierten Fall, daß z_o im feldfreien Raum liegt, sind die Lösungen s und s_1 identisch.

Für zwei Lösungen s und t der Dgl. (6 - 6) folgt, daß

$$\sqrt{V^*(z)} \cdot (s(z) \cdot t'(z) - t(z) \cdot s'(z)) = \text{const.}, \qquad (6 - 17)$$

also speziell

$$\sqrt{V^*(z_o)} = \sqrt{V^*(z_1)} \cdot M_L \cdot M_A \quad . \qquad (6 - 18)$$

Wegen dieser Beziehung genügt die Lösung t(z) zur Bestimmung von z_1, M_A und M_L .

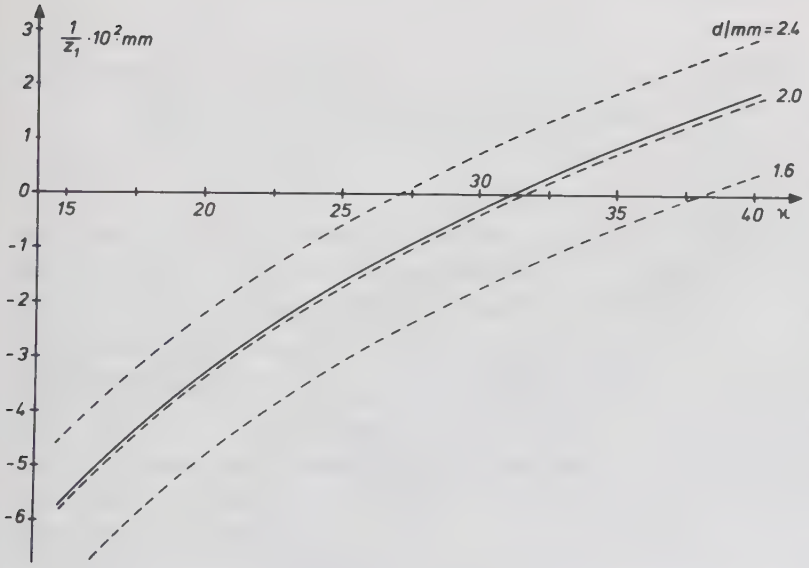

Abb. 26: Bildort z_1 als Funktion des Spannungsverhältnisses $\varkappa$ für 1.6 mm $\leq$ d $\leq$ 2.4 mm, sonst wie Abb. 25.

Für verschiedene Abstände d der abzubildenden virtuellen Quelle von der ersten Anode wurden nach (6 - 16) bis (6 - 18) die Bildlage z_1 und die Vergrößerungen M_A und M_L bestimmt. Die gestrichelten Kurven in Abb. 25 stellen $1/z_1$ für verschiedene Werte von d im Bereich 3.2 mm $\leq$ d $\leq$ 5.1 mm als Funktion von $\varkappa$ dar. Positive Werte von $1/z_1$ entsprechen einer rellen, negative einer virtuellen Abbildung. In Abb. 26 ist dasselbe noch für 1.6 mm $\leq$ d $\leq$ 2.4 mm dargestellt.

Abb. 27 zeigt die Angularvergrößerung M_A und Abb. 28 den Kehrwert $1/M_L$ der Lateralvergrößerung des Beschleunigungssystems als Funktion von $\varkappa$ für Quellenabstände von 1.6 mm $\leq$ d $\leq$ 5.1 mm. Hier entsprechen positive Werte virtuellen und negative Werte reellen Abbildungen.

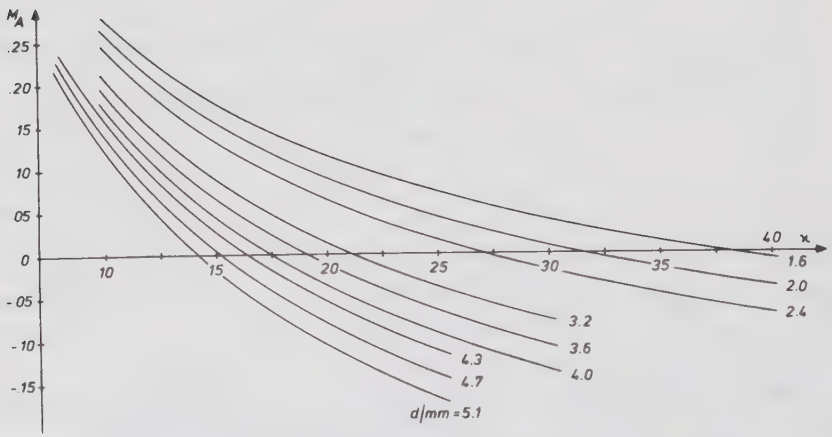

Abb. 27: Angularvergrößerung M_A des Beschleunigungssystems als Funktion des Spannungsverhältnisses $\varkappa$ für Quellenabstände 1.6 mm $\leq$ d $\leq$ 5.1 mm.

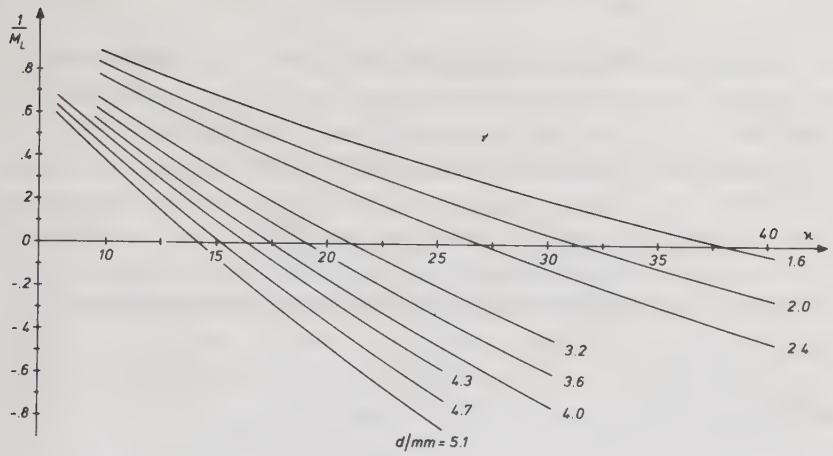

Abb. 28: Lateralvergrößerung M_L des Beschleunigungssystems als Funktion des Spannungsverhältnisses $\varkappa$ für Quellenabstände 1.6 mm $\leq$ d $\leq$ 5.1 mm.

Definiert man die Öffnungsfehlerkoeffizienten 3. Ordnung C_S bzw. C_{SB} so, daß für den Achsenabstand $\Delta\varrho$ in der Bildebene von bei $z = z_o$ auf der Achse beginnenden Bahnen gilt

$$\Delta\varrho = M_L \cdot C_S \cdot \gamma_o^3 + o(\gamma_o^5) = C_{SB} \cdot \gamma_1^3 + o(\gamma_1^5) \quad , \qquad (6 - 19)$$

wobei $\gamma_o = r'(z_o)$ bzw. $\gamma_1 = r'(z_1) = M_A \cdot \gamma_o$ die Bahnsteigungen in der Objekt- bzw. Bildebene sind, so ergibt sich z.B. nach Hoch, Kasper, Kern (1976) oder Lenz (1975) im nichtrelativistischen Grenzfall

$$C_S = \frac{1}{64}\sqrt{V(z_o)} \int_{z_o}^{z_1} \frac{\eta^3(z)}{\sqrt{V(z)}} \left[(5G'^2 - \frac{11}{2} G^2 G' + 3G^4)\eta(z) + 4GG'\eta' \right] dz \, , \qquad (6 - 20)$$

und wenn Objekt- und Bildebene im feldfreien Raum liegen

$$C_{SB} = M_L^4 \cdot (U_b/U_s)^{\frac{3}{2}} \cdot C_S \quad . \qquad (6 - 21)$$

Die axialen Farbfehlerkoeffizienten C_{FO} bzw. C_{FB} werden so definiert, daß für den Achsenabstand $\Delta\varrho$ in der Bildebene einer bei $z = z_o$ auf der Achse beginnenden paraxialen Bahn eines Elektrons mit Anfangsenergie $e(U_s + \Delta U)$ gilt

$$\Delta\varrho = -M_L \cdot C_{FO} \cdot \gamma_0 \frac{\Delta U}{U_s} = -C_{FB} \cdot \gamma_1 \cdot \frac{\Delta U}{U_b} \quad . \qquad (6 - 22)$$

Es ergibt sich dann wieder z.B. nach Hoch, Kasper, Kern (1976)

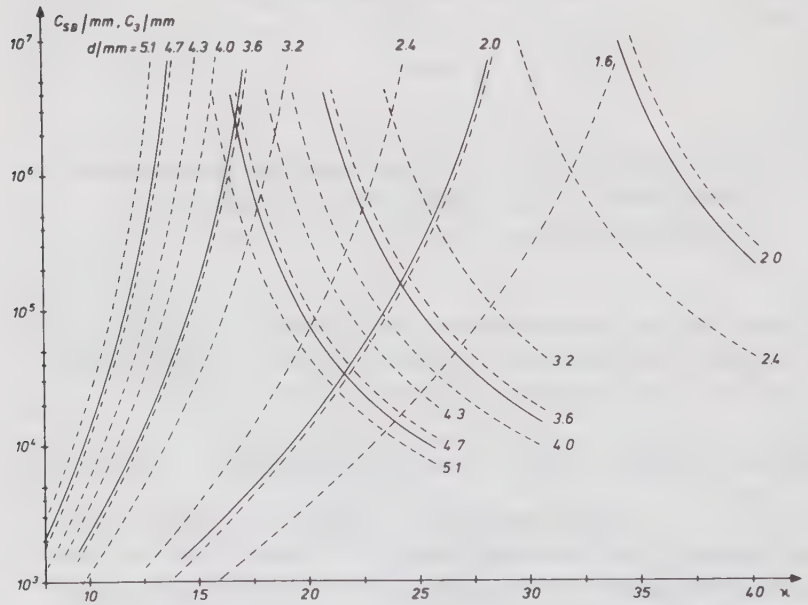

Abb. 29: Auf die Bildebene bezogene Öffnungsfehlerkoeffizienten C_{SB} des Beschleunigungssystems (gestrichelt) und C_3 des Gesamtsystems (ausgezogen) als Funktion von α für Quellen- bzw. Spitzenabstände 1.6 mm $\leq$ d $\leq$ 5.1 mm.

$$C_{FO} = \frac{3}{8} V(z_o) \int_{z_o}^{z_1} \left[G^2(z)/V(z)\right] \eta^2(z)\, dz \quad , \qquad (6 - 23)$$

und da Objekt- und Bildebene im feldfreien Raum liegen

$$C_{FB} = M_L^2 \left(U_b/U_s\right)^{\frac{3}{2}} \cdot C_{FO} \quad . \qquad (6 - 24)$$

Die gestrichelten Kurven in Abb. 29 und Abb. 30 stellen die auf die Bildebene bezogenen Koeffizienten C_{SB} und C_{FB} als Funktion von $\varkappa$ dar, jeweils wieder für verschiedene Werte von d im Bereich 1.6 mm $\leq$ d $\leq$ 5.1 mm. Diese Größen weisen beim Übergang von virtueller zu reeller Abbildung eine Singularität auf, die nach (6 - 21) bzw. (6 - 24) von der entsprechenden Singularität der Lateralvergrößerung herrührt.

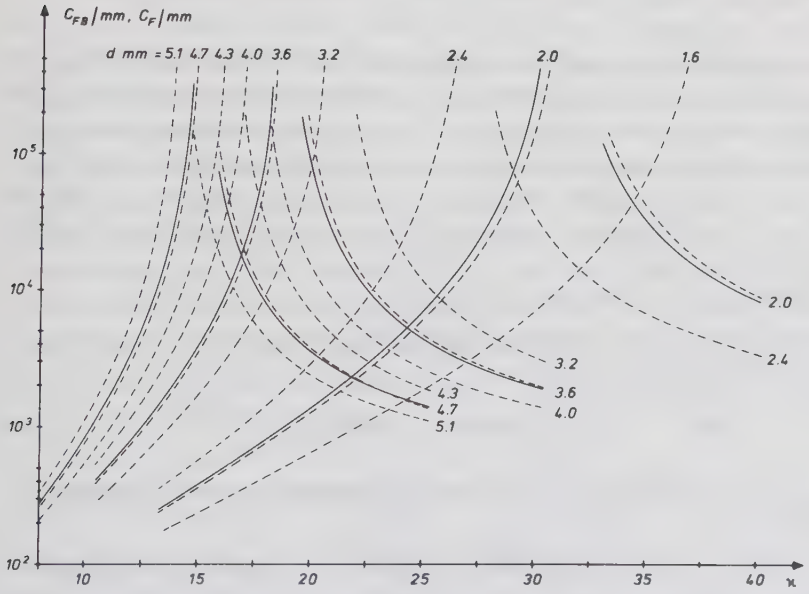

Abb. 30: Auf die Bildebene bezogene Farbfehlerkoeffizienten C_{FB} des Beschleunigungssystems (gestrichelt) und C_F des Gesamtsystems (ausgezogen) als Funktion von $\varkappa$ für Quellen- bzw. Spitzenabstände 1.6 mm $\leq$ d $\leq$ 5.1 mm.

6.3 Bahnrechnungen im Gesamtsystem

Die Eigenschaften des Gesamtsystems unter Einbeziehung der Spitze wurden durch numerische Bahnberechnung untersucht. Die Rechnungen wurden für die Spitzenabstände d = 4.7 mm, 3.6 mm und 2.0 mm durchgeführt. Der in (5 - 3) definierte Formfaktor betrug β = 1.6, der Spitzenradius jeweils r_s = 84.6 nm. Die Saugspannung betrug U_s = 1.5 kV bei d = 2.0 mm und d = 3.6 mm, U_s = 2.0 kV bei d = 4.7 mm; die Spitzenfeldstärken waren dann im Bereich von $2.5 \cdot 10^6$ V/mm bis $3 \cdot 10^6$ V/mm. Selbst bei der höchsten verwendeten Beschleunigungsspannung von U_b = 60 kV bei $\varkappa$ = 40, d = 2 mm erwies sich in Kontrollrechnungen die Verwendung der nichtrelativistischen Bewegungsgleichung (5 - 22) als ausreichend.

Die Informationen über die Eigenschaften des Systems wurden hauptsächlich aus zwei Scharen von Meridionalbahnen gewonnen. Einmal wurden Bahnen berechnet, die an verschiedenen Stellen auf der Spitze mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit beginnen, d.h. nach Abb. 15 Bahnen für verschiedene Werte von ϑ und γ = 0. ϑ wurde im Bereich $0 < \vartheta \leq 3^\circ$ variiert, was einem Emissionsbereich von 4.2 nm entspricht. Die Asymptoten dieser Bahnen im feldfreien Raum hinter dem Beschleunigungssystem haben eine Steigung $\varrho'(\vartheta)$ und schneiden die Achse bei $z_a(\vartheta)$. Durch den Ansatz

$$z_a(\vartheta) = z_1 - C_3 \varrho'^2(\vartheta) + o(\varrho'^4) \quad , \qquad (6 - 25)$$

der in der Ebene $z = z_1$ für die Bahnasymptoten den Achsenabstand

$$\Delta\varrho = C_3 \varrho'^3 + o(\varrho'^5) \qquad (6 - 26)$$

liefert, werden die Fokusebene z_1 und der Fehlerkoeffizient C_3 definiert. z_1 ist damit die Ebene, in der achsennahe Bahnen mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit fokussiert werden. Der engste Querschnitt eines Bündels mit endlicher Apertur

liegt dann bei kleineren Werten von z. Diese Längsaberration beträgt aber hier nur Bruchteile von Millimetern, so daß sie bei der Angabe der Fokuslage vernachlässigt werden kann. z_1 und C_3 werden durch lineare Ausgleichsrechnung mit dem Ansatz (6 - 25) und den berechneten Wertepaaren $(z_a(\vartheta), \varrho'(\vartheta))$ bestimmt. Je nach der Zahl der berechneten Bahnen und den auftretenden Werten für ϱ' ist es erforderlich, in (6 - 25) noch die höheren Terme

$$C_{2n+1}\,\varrho'^{2n} \quad , \; n = 2,\ldots,N_c$$

bei der Ausgleichsrechnung zu berücksichtigen. Meist wurde mit $N_c = 3$ bei 6 bis 10 Bahnen gerechnet.

Eine zweite Schar von Meridionalbahnen ging vom Achsenpunkt $\vartheta = 0$ aus, aber mit verschiedenen Anfangsrichtungen γ (vgl. Abb. 15). Auch von diesen Bahnen wurden die Achsenschnittpunkte $z_a(\gamma)$ und die Steigungen $\varrho'(\gamma)$ der Bahnasymptoten im feldfreien Raum ausgewertet. Die Anfangsrichtung wurde im Bereich $6^o \leq \gamma \leq 90^o$ variiert; außerdem wurden die Rechnungen für verschiedene Anfangsenergien E_o mit 0.01 eV $\leq E_o \leq$ 0.5 eV durchgeführt. Für jede Energie E_o wurden nach dem Ansatz

$$z_a(\gamma, E_o) = z_1'(E_o) - C_3'(E_o)\,\varrho'^2(\gamma) + o(\varrho'^4) \qquad (6 - 27)$$

wieder durch Ausgleichsrechnung Koeffizienten $z_1'(E_o)$ und $C_3'(E_o)$ bestimmt. Aus den Werten von $z_1'(E_o)$ als Funktion von E_o wurde durch Ausgleichsrechnung mit dem Ansatz

$$z_1'(E_o) = z_1' + C_F\left(\frac{E_o}{eU_b}\right) + o\left(\left(\frac{E_o}{eU_b}\right)^2\right) \qquad (6 - 28)$$

der Fehlerkoeffizient C_F bestimmt. (6 - 28) liefert in der Ebene $z = z_1'$ den durch den Farbfehler bedingten Achsenabstand der Bahnasymptoten

$$\Delta\varrho = -C_F \cdot \varrho'\left(\frac{E_o}{eU_b}\right) + o\left(\left(\frac{E_o}{eU_b}\right)^2 \cdot \varrho'\right) . \qquad (6 - 29)$$

Die Fokusdifferenz $z_1' - z_1$ betrug in allen Fällen wenige μm, was bei Steigungen um 10^{-3} zu Achsenabständen im Nanometerbereich führt.

Schließlich wurde aus den Bahnen der 2. Schar auch die Lateralvergrößerung M bei Abbildung der Spitze in die Ebene $z = z_1'$ gewonnen. Betrachtet man nämlich die zur Achse senkrechte Geschwindigkeitskomponente bei der Emission

$$v_{o\perp} = v_o \cdot \sin\gamma = \sqrt{\frac{2E_o}{m}} \cdot \sin\gamma \qquad (6 - 30)$$

und beim Achsenschnitt im feldfreien Raum

$$v_{1\perp} = v_1 \cdot \varrho' \Big/ \sqrt{1+\varrho'^2} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_o + eU_b)} \cdot \varrho' \Big/ \sqrt{1+\varrho'^2}\,, \qquad (6 - 31)$$

so muß wegen der Sinusbedingung (vgl. Glaser (1952 b) und aus Symmetriegründen eine Reihenentwicklung von $v_{1\perp}$ nach Potenzen von $v_{o\perp}$ die Form

$$v_{1\perp} = M^{-1} \cdot v_{o\perp} + o(v_{o\perp}^3) \qquad (6 - 32)$$

haben. Aus den Geschwindigkeitskomponenten am Anfang und am Ende der Bahnen der 2. Schar wurde wieder durch Ausgleichsrechnung mit (6 - 32) M bestimmt.

Die ausgezogenen Kurven in den Abb. 25 und 26 stellen für die Spitzenabstände d = 4.7 mm, 3.6 mm und 2.0 mm die nach (6 - 25) gewonnene Fokusebene z_1 als Funktion von $\varkappa$ dar. Die ausgezogenen Kurven in den Abb. 29 und 30 zeigen die nach (6 - 25) bzw. (6 - 28) bestimmten Koeffizienten C_3 bzw. C_F. In Abb. 31 ist die nach (6 - 32) berechnete Vergrößerung bei der Abbildung der Spitze dargestellt. Wegen der auftretenden Singularität beim Übergang von virtueller zu reeller Abbildung ist wieder M^{-1} über $\varkappa$ aufgetragen. Die Ähnlichkeit dieser Kurven mit denen für M_L^{-1} in Abb. 28 rührt daher, daß der Zusammenhang

$$M = M_V \cdot M_L \qquad (6 - 33)$$

besteht. Dabei ist M_V die Lateralvergrößerung bei der Abbildung der Spitze durch das Emissionssystem in die virtuelle Quelle im Abstand d_V, M_L die Lateralvergrößerung bei Abbildung dieser virtuellen Quelle durch das Beschleunigungssystem.

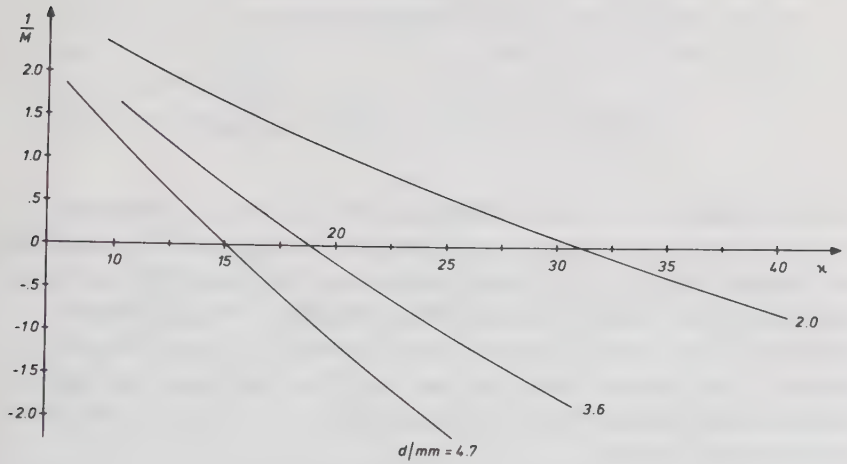

Abb. 31: Lateralvergrößerung M bei Abbildung der Spitze durch das Gesamtsystem als Funktion von $\varkappa$, für Spitzenabstände d = 2.0 mm, 3.6 mm und 4.7 mm.

Offensichtlich verlaufen in den Abb. 25, 26, 29 und 30 die Kurven für die Fokusebene und die Fehlerkoeffizienten C_3 und C_F einigermaßen parallel zu den gestrichelten Kurven aus paraxialen Rechnungen. Es ist daher möglich, eine virtuelle Quelle im Abstand $d_V(d)$ von der ersten Anode zu definieren, so daß ihre Abbildung durch das Beschleunigungssystem allein dieselbe Fokusebene liefert wie die Abbildung der realen Quelle durch

das Gesamtsystem. Diese virtuelle Quelle stimmt nicht genau mit derjenigen bei $d_v' = - z_1|_{\chi=1}$ überein, die man aus (6 - 25) erhält, wenn man das System mit $U_s = U_b$ betreibt. Es ergaben sich die Werte der Tabelle 4:

Tabelle 4:

d/mm	d_v/mm	d_v'/mm
2.0	2.035	2.020
3.6	3.652	3.636
4.7	4.774	4.755

Die in Abbildung 25 eingezeichneten Kreuze stellen Meßwerte von Kurz dar (vgl. Kern, Kurz, Speidel (1978)). Die Schwankung der Meßwerte zeigt, daß ihre Genauigkeit geringer ist als die Abweichung der exakten numerischen Rechnung (durchgezogene Kurven) von der in 6.2 beschriebenen Näherung (gestrichelte Kurven). Das System kann also bei den hier untersuchten Spitzenabständen mit hinreichender Genauigkeit in paraxialer Näherung beschrieben werden.

Eine Beschreibung der Struktur des engsten Bündelquerschnitts, d.h. eine Aussage darüber, mit welcher Steigung und in welchem Achsenabstand Elektronen die Ebene des engsten Bündelquerschnitts oder eine andere Referenzebene durchstoßen, läßt sich unter Beschränkung auf Meridionalbahnen mit Hilfe von Emittanzdiagrammen darstellen, wie sie von Lauer und Hanßen (1975) an Strahlerzeugungssystemen mit thermischer Emission gemessen und von Hauke (1977) berechnet wurden. In den berechneten Diagrammen wird der Achsenabstand einer Bahn in einer Referenzebene als Ordinate über der Steigung der Bahn in der Referenzebene als Abszisse aufgetragen.

Insgesamt wurden etwa 300 monoenergetische Bahnen berechnet, die von verschiedenen Punkten der Spitze mit verschiedenen Anfangsrichtungen ausgingen. Die Startorte wurden, von der Achse beginnend, in äquidistanten Intervallen $\Delta\vartheta = 0.3^{\circ}$ gewählt, was bei einer Spitze mit 92.4 nm Radius einer radialen Schrittweite von $\Delta\varrho_o = 0.484$ nm entspricht. Die Anfangsrichtungen wurden so gewählt, daß die Endsteigung im Intervall $-4\cdot10^{-3} \leq \varrho' \leq +4\cdot10^{-3}$ lag und daß die Emissionswahrscheinlichkeit (4^{-} - 10) noch mindestens 10% des Wertes für $\gamma = 0$ betrug. Für $E_o = 0.5$ eV und die in Abschnitt 4 benutzten Daten ist diese Grenze bei $\gamma \approx \pm 40^{\circ}$ erreicht, während bei $\vartheta = 3^{\circ}$ und $\varkappa = 26$ gerade $\gamma = -30^{\circ}$ etwa $\varrho' \approx 0$ liefert.

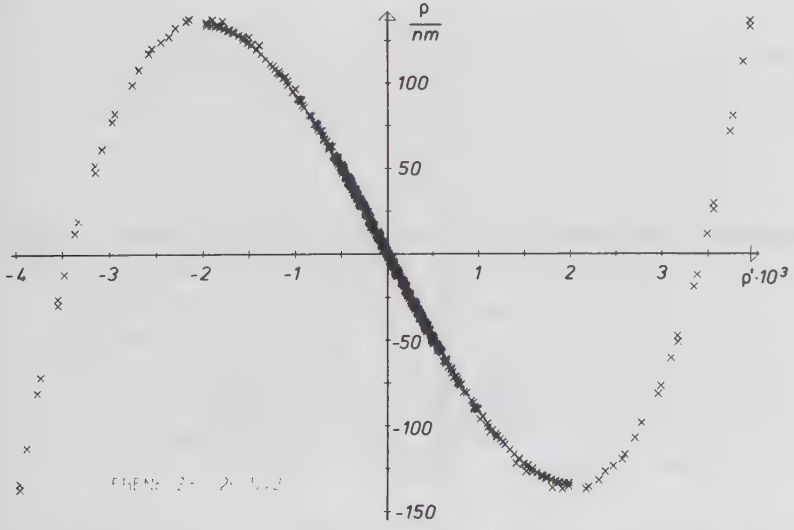

Abb. 32: Emittanzdiagramm für die Ebene des engsten Bündelquerschnitts bei einer Apertur von $4\cdot10^{-3}$.

Wählt man als Referenzebene die Ebene des engsten Querschnitts eines Bündels mit der Apertur $4 \cdot 10^{-3}$, d.h. $|\varsigma'| \leq 4 \cdot 10^{-3}$, so erhält man das Emittanzdiagramm der Abb. 32. Jedes Kreuz stellt eine Bahn dar, die die Referenzebene im Achsenabstand ς und mit der Steigung ς' schneidet. Hier wird deutlich, daß auf Grund der Abbildungsfehler des Systems ein beträchtlicher Bündeldurchmesser entsteht.

Betrachtet man ein Bündel mit der Apertur $5 \cdot 10^{-4}$, so erhält man in dessen engstem Querschnitt das Emittanzdiagramm der

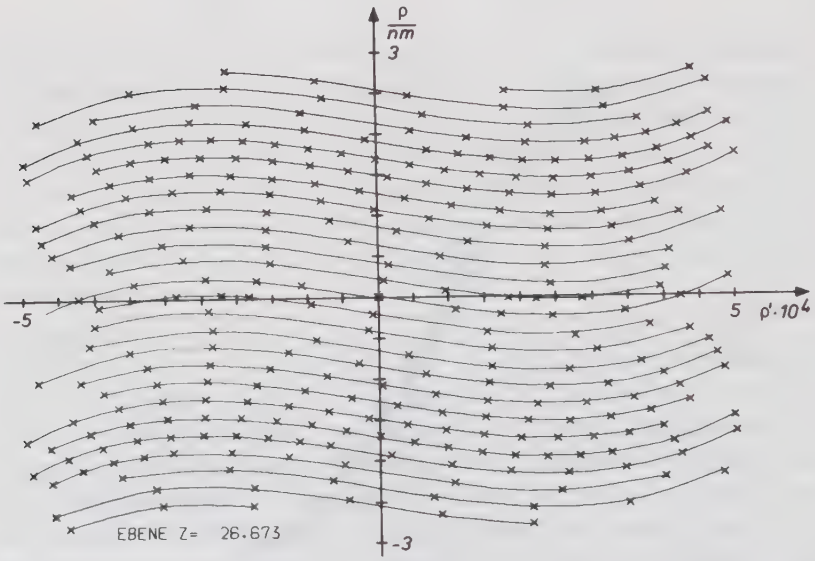

Abb. 33: Emittanzdiagramm für die Ebene des engsten Bündelquerschnitts bei einer Apertur von $5 \cdot 10^{-4}$. Von einem gemeinsamen Punkt ausgehende Bahnen sind miteinander verbunden.

Abb. 33 . Hier sind die von einem gemeinsamen Ort auf der Spitze ausgehenden Bahnen miteinander verbunden. Die Größe des engsten Bündelquerschnitts wird jetzt durch die Größe des Bereichs auf der Spitze bestimmt, der in den entsprechenden Raumwinkel emittiert.

Bei der Berechnung dieses Diagramms ergab sich für die nach (6 - 32) bestimmte Vergrößerung $M = -0.439$.
$\Delta\varrho = |M|\,\Delta\varrho_0 = 0.212$ nm stimmt genau mit dem Abstand der Schnittpunkte der zu den einzelnen Emissionsorten gehörenden Linien mit der Achse $\varrho' = 0$ überein.

7. Zusammenfassung

Zur Bestimmung der Potentialverteilung in rotationssymmetrischen Elektrodensystemen mit feiner Spitze wird die Laplace-Gleichung in der nahen Umgebung der Spitze analytisch, im übrigen System nach einem Differenzenverfahren so gelöst, daß beide Lösungen stetig differenzierbar aneinander anschließen. Für die analytische Lösung ergibt sich durch Separation in Kugelkoordinaten eine Reihenentwicklung nach Legendrefunktionen von nicht ganzzahligem Grad. Separationsansätze in elliptischen und parabolischen Koordinaten werden diskutiert. Die Lösung mittels Differenzenverfahren wird nach der Methode der sukzessiven Überrelaxation durchgeführt. Für die Interpolation und Differentiation in quadratischen Maschennetzen werden spezielle Formeln hergeleitet.

Als Grundlage für Bahnberechnungen wird ein Modell einer klassischen Energie- und Richtungsverteilung der austretenden Elektronen bei Feldemission entwickelt.

Bei einem Diodensystem wird die Feldstärke an der Spitze als Funktion der Spitzenform und -größe untersucht. Es zeigt sich, daß in diesem Fall frühere Ansätze anderer Autoren für die Feldstärke zu hohe Werte liefern. Durch Berechnung von der Spitze ausgehender Elektronenbahnen wird gezeigt, daß der Achsenabstand der Bahnen in einer Registrierebene in einem großen Bereich eine lineare Funktion des Winkels ϑ ist, der den Abstand des Emissionsorts auf der Kathode von der Systemachse beschreibt.

Bei einem Triodensystem werden einerseits die Abbildungseigenschaften des Beschleunigungsteils einschließlich seines Farb- und Öffnungsfehlers durch Berechnung paraxialer Bahnen bestimmt, andererseits die Eigenschaften des Gesamtsystems durch Berechnung von der Spitze ausgehender Bahnen. Der Vergleich mit

experimentellen Werten zeigt, daß bei den untersuchten Spitzenabständen von 2 mm bis 4.7 mm von der ersten Anode das Gesamtsystem mit hinreichender Genauigkeit in einer Näherung beschrieben werden kann, die von der Vorstellung ausgeht, daß das Beschleunigungssystém eine virtuelle Quelle abbildet, die je nach Spitzenabstand 35 μm bis 75 μm hinter der realen Quelle liegt.

An Hand von zwei berechneten Emittanzdiagrammen wird veranschaulicht, in welcher Weise von verschiedenen Orten und in verschiedene Richtungen emittierte Elektronen zur Stromdichteverteilung im engsten Bündelquerschnitt beitragen.

Bei Herrn Prof. Dr. F.Lenz bedanke ich mich herzlich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit.

Ferner danke ich den Herren Prof. Dr. E.Kasper, Prof. Dr. R.Speidel, Dr. H.Hoch und Dr. R.Hauke für viele wertvolle Diskussionen.

Dem Zentrum für Datenverarbeitung der Universität Tübingen sei für die zur Verfügung gestellten Rechenmöglichkeiten gedankt, sowie der Studienstiftung des Deutschen Volkes für ihre Unterstützung.

Literatur

Abramowitz, M. und I.A, Stegun (1970), Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ., New York

Ames, W.F. (1969), Numerical Methods for Partial Differential Equations, Nelson Ltd., London

Becker, J.A. (1951), Bell Syst. Techn. J. 30, 907

Butler, J.W. (1966), 6th Intern. Congr. Electron Microsc. Kyoto, 191

Carré, B.A. (1961), The Computer Journal 4, 73

Centre National d'Etudes des Télécommunications (1959), Tables Numériques des Fonctions Associées de Legendre, Editions de La Revue d'Optique, Paris

Crewe, A.V., Eggenberger, D.N., Wall, J. und L.M. Welter(1968), Rev. Sci. Instrum. 39, 576

Drechsler, M. und E. Henkel (1954), Z. Angew. Physik 6, 22

Dyke, W.P., Trolan, J.K., Dolan, W. und G. Barnes (1953), J. Appl. Phys. 24, 570

Dyke, W.P. und J.K. Trolan (1953), Phys. Rev. 89, 799

Dyke, W.P. und W. Dolan (1956), in Advances in Electronics and Electron Physics 8, 89

Erdelyi, A. et al. (1953), Higher Transcendental Functions I, McGraw-Hill, New York

Everhart, T.E. (1967), J. Appl. Phys. 38, 4944

Fowler, R.H. und L.W. Nordheim (1928), Proc. Roy. Soc. Lond. A119, 173

Gadzuk, J.W. und E.W. Plummer (1973), Reviews of Modern Physics 45, 487

Glaser, W. (1952 a), Grundlagen der Elektronenoptik, Springer-Verlag, Wien, 38

Glaser, W. (1952 b), loc. cit., 620

Gomer, R. (1961), Field Emission and Field Ionization, Harvard U. P., Cambridge, Mass.

Good, R.H. und E.W. Müller (1956), in Handbuch der Physik 21, 176

Haefner, R. (1940), Z. Phys. 116, 604

Hauke, R. (1977), Theoretische Untersuchungen rotationssymmetrischer Elektronenstrahlerzeugungssysteme unter Berücksichtigung von Raumladung, Dissertation, Tübingen

Hoch, H., Kasper, E. und D. Kern (1976), Optik 46, 463

Kasper, E. (1974), Berechnung elektromagnetischer Felder, Vorlesung an der Universität Tübingen, SS 1974

Kasper, E. (1976), Optik 46, 271

Kern, D., Kurz, D. und R. Speidel (1978), Optik, in Vorbereitung

Kuroda, K., Ebisui, H. und T. Suzuki (1974), J. Appl. Phys. 45, 2336

Lauer, R. und K.-J. Hanßen (1975), PTP-Bericht PTB-APh-9, Physikalisch Technische Bundesanstalt, Braunschweig

Lenz, F. (1973), in Image Processing and Computer-aided Design in Electron Optics, Herausg.: P.W. Hawkes, Academic Press, London, 274

Lenz, F. (1975), Lectures on Geometrical Electron Optics, Oregon

Levi-Setti, R. (1974), Proc. 7th Annual SEM Symposium, IIT Research Institute, Chicago, 125

Marton, L. (1954), Proc. Electron Optics Symp. Washington 1951, Nat. Bureau of Standards Publ. No. 527, 265

Morse, P.M. und H. Feshbach (1953), Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York

Müller, E.W. (1938), Z. Phys. 108, 668

Müller, E.W. (1960), in Advances in Electronics and Electron Physics 13, 83

Munro, E. (1972), Proc. 5th Europ. Congr. Electron Microsc., 22

Munro, E. (1973), in Image Processing and Computer-aided Design in Electron Optics, Herausg.: P.W. Hawkes, Academic Press, London, 284

Orloff, W. und L.W. Swanson (1977), Proc. 10th Annual SEM Symposium, IIT Research Institute, Chicago, 57

Pattee, H.H. (1953), J. Opt. Soc. Amer. 43, 61

Ralston, A. und H.S. Wilf (1972), Mathematische Methoden für Digitalrechner I, Oldenbourg Verlag, München

Rose, D.J. (1956), J. Appl. Phys. 27, 215

Roth, T.A., Munch, J. und E. Zeitler (1974), 32nd Ann. EMSA Meeting, 420

Ruska, E. (1933), Z. Phys. 83, 684

Schwarzer, R. und K.H. Gaukler (1978), Vakuum-Technik 27

Schwertfeger, W. und E. Kasper (1974), Optik 41, 160

Speidel, R. und D. Kurz (1977), Optik 49, 173

Stoer, J. und R. Bulirsch (1973), Einführung in die Numerische Mathematik II, Springer-Verlag, Berlin

Teubner, J. (1977), Diplomarbeit, Tübingen

Tonomura, A. (1973), Jap. J. Appl. Phys. 12, 1065

Troyon, M., Kuo, H.P. und B.M. Siegel (1973), 31st Annual EMSA Meeting New Orleans

Troyon, M. und A. Laberrigue (1977), J. Microsc. Spectrosc. Electron. 2, 7

Veneklasen, L.H. (1972), Optik 36, 410

Veneklasen, L.H. und B.M. Siegel (1972), J. Appl. Phys. 43, 4989

Weber, C. (1967), in Focusing of Charged Particles II, Herausg.: A. Septier, Academic Press, London, 45

Wiesner, J.C. (1970), Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, Report No. ERL-70-6 (unpublished)

Wiesner, J.C. und T.E. Everhart (1973), J. Appl. Phys. 44, 2140

Wiesner, J.C. und T.E. Everhart (1974), J. Appl. Phys. 45, 2797

Wood, R.W. (1897), Phys. Rev. 5, 1

Worster, J. (1969), Optik 29, 498

Young, R.D. (1959), Phys. Rev. 113, 110

Anhang I: Berechnung der Legendrefunktionen 1. Art $P_\nu(x)$

Nach Abramowitz und Stegun (1970) lassen sich die Legendrefunktionen 1. Art für beliebigen Grad ν durch eine hypergeometrische Reihe $F(a,b;c;z)$ darstellen:

$$P_\nu(x) = F\left(-\nu,\ 1+\nu;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right), \qquad (I-1)$$

$$\text{wobei } F(a,b;c;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,z^n, \qquad (I-2)$$

$$\text{mit } (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \qquad (I-3)$$

Für $\mathrm{Re}(c-a-b) = 0$ wie hier, ist der Konvergenzbereich von (I - 2) der Einheitskreis $|z| \leq 1$ mit Ausnahme des Punktes $z = 1$. Man kann daher prinzipiell $P_\nu(\cos\vartheta)$ für $0 \leq \vartheta < \pi$ nach (I - 1) berechnen. Dabei treten allerdings zwei Schwierigkeiten auf:

1. Falls ν nicht ganzzahlig ist, die Reihe also nicht nach $\nu+1$ Termen abbricht, wird die Konvergenz für $\vartheta \to \pi$, d.h. $z \to 1$ sehr schlecht.
2. Für große ν (schon für $\nu > 6$) können einzelne Partialsummen von (I - 2) sehr groß werden, so daß bei der Summation beträchtliche Rundefehler entstehen.

Nach Abramowitz und Stegun (1970), Formel 15.3.10 gilt für $|1-z| < 1$:

$$F(a,b;a+b;z) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(n!)^2} \Big[2\,\psi(n+1) - \psi(a+n) - \psi(b+n) - \ln(1-z)\Big](1-z)^n \qquad (I-4)$$

Dabei ist $\psi(x) := \frac{d}{dx}(\ln\Gamma(x))$.

Diese Beziehung ist hier anwendbar und liefert mit

$$\Gamma(-\nu)\,\Gamma(1+\nu) = -\frac{\pi}{\sin(\pi\nu)} \qquad (I-5)$$

für nichtganzzahliges ν :

$$P_\nu(x) = -\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[A_n - \ln y\right] y^n \quad . \qquad \text{(I - 6)}$$

Dabei ist

$$A_n = 2\psi(n+1) - \psi(-\nu+n) - \psi(1+\nu+n) \qquad \text{(I - 7)}$$

$$B_n = \frac{(-\nu)_n\,(1+\nu)_n}{(n!)^2} \qquad \text{(I - 8)}$$

$$y = \frac{1+x}{2} = \cos^2\frac{\vartheta}{2} \quad . \qquad \text{(I - 9)}$$

Man kann nun zur Berechnung von $P_\nu(\cos\vartheta)$ für $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$ und für ganzzahlige ν (I - 1) und (I - 2) benutzen. Dabei ist $|z| = \left|\frac{1-\cos\vartheta}{2}\right| \le \frac{1}{2}$. Für $\pi/2 < \vartheta < \pi$ bietet sich Formel (I - 6) mit $0 < y < \frac{1}{2}$ an. Damit sind die Konvergenzprobleme bei der Summation der Reihen beseitigt.

Das Restglied

$$R_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-\nu)_n\,(1+\nu)_n}{(n!)^2}\, z^n =: \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad \text{(I - 10)}$$

der Reihe (I - 2) läßt sich für $N > \nu$ abschätzen:

$$|R_N| < |\alpha_{N+1} z^{N+1}| \cdot (1-|z|)^{-1} \quad . \qquad \text{(I - 11)}$$

Ist daher ε die Genauigkeit, mit der $P_\nu(x)$ berechnet werden soll, so kann die Aufsummation von (I - 2) für $N > \nu$ abgebrochen werden, sobald

$$|\alpha_{N+1} z^{N+1}| < \varepsilon\,(1-|z|) \qquad \text{(I - 12)}$$

ist.

Für das Restglied der Reihe (I - 6) läßt sich eine etwas kompliziertere Abschätzung angeben, jedoch hat es sich als ausreichend erwiesen, die Summation abzubrechen, sobald der n-te

Summand um einen Faktor 10^{-12} kleiner als die n-te Partialsumme war.

Bei der jeweiligen Berechnung von A_n in (I - 6) ist es sinnvoll, von der Rekursionsformel

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x} \qquad \text{(I - 13)}$$

Gebrauch zu machen. Man erhält damit eine Rekursionsformel für A_n:

$$A_n = A_{n-1} + \left[\frac{2}{n} - \frac{1}{n-\nu-1} - \frac{1}{n+\nu} \right], \; n = 1, \ldots \qquad \text{(I - 14)}$$

Mit $\Psi(1-x) = \Psi(x) + \pi \cot(\pi x)$ folgt:

$$A_0 = 2\left[\Psi(1) - \Psi(1+\nu)\right] - \pi \cot(\pi\nu). \qquad \text{(I - 15)}$$

So braucht bei der Summation von (I - 6) nur eine Psi-Funktion berechnet werden. Dies geschieht mit Hilfe der bei Abramowitz und Stegun (1970) als Formel 6.3.18 angegebenen asymptotischen Entwicklung

$$\Psi(z) \sim \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{B}_{2n}}{2n\, z^{2n}} \qquad \text{(I - 16)}$$

$$= \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12 z^2} + \frac{1}{120 z^4} - \frac{1}{252 z^6} + \frac{1}{240 z^8} - \frac{5}{660 z^{10}} + O(z^{-12})$$

Die $\tilde{B}_n$ sind die Bernoullizahlen.

Auch die Koeffizienten B_n in (I - 6) können rekursiv berechnet werden:

$$B_n = B_{n-1}\left(1 - \frac{\nu+1}{n}\right)\left(1 + \frac{\nu}{n}\right) \qquad \text{(I - 17)}$$

mit $B_0 = 1$.

Zur Vermeidung von großen Partialsummen bei größeren Werten von ν wurde mit Hilfe der Rekursionsformel

$$P_\nu(x) = \frac{2\nu-1}{\nu} \times P_{\nu-1}(x) - \frac{\nu-1}{\nu} P_{\nu-2}(x) \qquad \text{(I - 18)}$$

für $\nu > 2$ die Berechnung von P_ν auf die Berechnung von P_{ν_1} und P_{ν_2} mit $0 < \nu_1 < 1$, $\nu_2 = \nu_1 + 1$ zurückgeführt.

Zur Berechnung von Feldstärken wird auch die Ableitung $P_\nu'(x) = \frac{d}{dx} P_\nu(x)$ benötigt. Für $\nu \leq 2$ wird diese aus den differenzierten Reihen (I - 1) bzw. (I - 6) gewonnen, die gleich mit aufsummiert werden.

Für $\nu > 2$ bietet sich die Benutzung der Rekursionsformel

$$P_\nu'(x) = \frac{\nu}{1-x^2} \left[-x P_\nu(x) + P_{\nu-1}(x) \right] \qquad \text{(I - 19)}$$

an, da die hier benötigten Funktionen ohnehin zur Verfügung stehen. (I - 19) hat sich jedoch für $\vartheta \to 0$, d.h. $x \to 1$ als instabil erwiesen, da dann P_ν' als Quotient kleiner Zahlen gewonnen wird.

Nach Erdelyi et al. (1953) gilt außer (I - 19) auch

$$P_\nu'(x) = \frac{\nu+1}{1-x^2} \left[x P_\nu(x) - P_{\nu+1}(x) \right] . \qquad \text{(I - 20)}$$

Durch Kombination von (I - 19) und (I - 20) folgt

$$P_\nu'(x) = x P_{\nu-1}'(x) + \nu P_{\nu-1}(x) . \qquad \text{(I - 21)}$$

Für $\nu > 2$ läßt sich mit Hilfe von (I - 21) und (I - 18) die Berechnung von P_ν' auf die Berechnung von P_{ν_1} $(0 < \nu_1 < 1)$ sowie P_{ν_2}, P_{ν_2}' $(\nu_2 = \nu_1 + 1)$ zurückführen.

Die Rechenprogramme wurden an Hand der Tafeln des Centre National d'Etudes des Télécommunications (1959) getestet. Es wurde stets Übereinstimmung in allen dort abgedruckten Stellen gefunden.

Herrn Dipl. Phys. A. Zdebik sei in diesem Zusammenhang für wertvolle Hinweise gedankt.

Anhang II: Interpolationsformeln für das Potential ϕ und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \phi}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial \phi}{\partial z}$.

In einem Punkt Q(ϱ, z) (vgl. Abb. 9a) werden ϕ, $\frac{\partial \phi}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ mit Hilfe von (3 - 59) und den entsprechenden differenzierten Formeln berechnet.
Dazu werden die 16 Funktionswerte

$$\begin{aligned} f_{1,\dots,6} &= \phi_{1,\dots,6} \quad , \\ f_{7,8} &= h \left.\frac{\partial \phi}{\partial \varrho}\right|_{1,2} \quad , \\ f_{9,10} &= h \left.\frac{\partial \phi}{\partial \varrho}\right|_{5,6} \quad , \\ f_{11,\dots,16} &= h \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{1,\dots,6} \end{aligned} \qquad \text{(II - 1)}$$

in den Nachbarpunkten 1,...,6 des Punktes Q benötigt. h ist die Maschenweite.

Fordert man, daß ϕ nach (3 - 59) in den Punkten 1,...,6 die Werte $f_{1,\dots,6}$ annimmt und entsprechendes für die Ableitungen, so erhält man zur Bestimmung der Koeffizienten a_k ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\sum_{k=1}^{16} B_{ik}\, a_k = f_i \quad , \quad i = 1,\dots,16 \qquad \text{(II - 2)}$$

Die Matrix B ist dabei unabhängig vom speziellen Aufpunkt Q. Man erhält daher folgenden funktionalen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten a_k und den Funktionswerten f_i:

$$a_k = \sum_{i=1}^{16} \left(B^{-1}\right)_{ki} f_i \quad , \; k = 1,\dots,16 \qquad \text{(II - 3)}$$

Die zu B inverse Matrix B^{-1} kann dabei durch numerische Inversion gewonnen werden. Da viele Matrixelemente von B^{-1} verschwinden oder sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, ist es

sinnvoll, die Ausdrücke (II - 3) zu vereinfachen. Mit den Abkürzungen

$$P_i = f_i + f_{i+1}\,, \qquad i = 1,3,5,\ldots,15$$
$$P_i = f_i - f_{i-1}\,, \qquad i = 2,4,6,\ldots,16 \qquad \text{(II - 4)}$$

und

$$C_1 = P_1 - P_5\,, \quad C_2 = P_1 + P_5$$
$$C_3 = P_2 - P_6\,, \quad C_4 = P_7 - P_9$$
$$C_5 = P_8 + P_{10}\,, \quad C_6 = P_7 + P_9 \qquad \text{(II - 5)}$$
$$C_7 = P_{11} - P_{15}\,, \quad C_8 = P_2 - 2P_4 + P_6$$
$$C_9 = P_{12} - P_{16}\,, \quad C_{10} = P_{12} + P_{16}$$
$$C_{11} = P_{10} - P_8\,, \quad C_{12} = P_{12} + P_{15}$$

erhält man

$$a_1 = \frac{1}{2} P_3 + \frac{1}{8} P_{14}$$
$$a_2 = -\frac{3}{8} C_1 - \frac{1}{8} C_6 - \frac{1}{16} C_9$$
$$a_3 = -\frac{3}{2} P_4 - \frac{1}{4} P_{13}$$
$$a_4 = -P_3 + \frac{1}{2} C_2 + \frac{1}{8}(C_4 - P_{14}) + \frac{1}{16} C_{10}$$
$$a_5 = C_3 + \frac{1}{4} C_5 + \frac{1}{8} C_7$$
$$a_6 = -\frac{1}{2} P_{14} \qquad \text{(II - 6)}$$
$$a_7 = \frac{1}{8}(C_1 + C_6)$$
$$a_8 = -\frac{5}{4} C_8 + \frac{1}{4}(C_{11} + P_{13}) - \frac{1}{8} C_{12}$$
$$a_9 = \frac{1}{4} C_9$$
$$a_{10} = 2 P_4 + P_{13}$$
$$a_{11} = \frac{1}{2} P_3 - \frac{1}{4} C_2 - \frac{1}{8} C_4$$
$$a_{12} = -\frac{1}{4}(C_3 + C_5)$$
$$a_{13} = \frac{1}{2} P_{14} - \frac{1}{4} C_{10}$$

$$a_{14} = - C_3 - \frac{1}{2} C_7$$

$$a_{15} = \frac{1}{2} C_8 - \frac{1}{4} C_{11}$$

$$a_{16} = C_7 - P_{13} + \frac{1}{2} C_{12} \quad .$$

Für achsennahe Punkte Q (vgl. Abb. 9b) läßt sich die Rotationssymmetrie des Feldes schon im Ansatz (3-61) ausnutzen. Es werden jetzt die 16 Funktionswerte

$$f_{1,\dots,6} = \phi_{1,\dots,6} \quad ,$$

$$f_{7,\dots,10} = h \frac{\partial \phi}{\partial z}\Big|_{3,\dots,6} \quad , \qquad \text{(II - 7)}$$

$$f_{11,\dots,16} = h \frac{\partial \phi}{\partial z}\Big|_{1,\dots,6}$$

benutzt. Die Bestimmung der Koeffizienten b_i erfolgt wie im außeraxialen Fall. Man erhält:

$$b_1 = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{8} P_{11}$$

$$b_2 = - \frac{3}{2} P_2 - \frac{1}{4} P_{11}$$

$$b_3 = - \frac{1}{2} P_{12}$$

$$b_4 = 2 P_2 + P_{11}$$

$$b_5 = - \frac{5}{4} P_1 + \frac{32}{27} P_3 + \frac{7}{108} P_5 - \frac{4}{9} P_7 - \frac{1}{72} P_9 - \frac{5}{32} P_{12} + \frac{1}{6} P_{14} - \frac{1}{96} P_{16}$$

$$b_6 = \frac{25}{8} P_2 - \frac{82}{27} P_4 - \frac{19}{216} P_6 + \frac{8}{9} P_8 + \frac{1}{36} P_{10} + \frac{5}{16} P_{11} - \frac{1}{3} P_{13} + \frac{1}{48} P_{15} \qquad \text{(II - 8)}$$

$$b_7 = \frac{5}{8} P_{12} - \frac{2}{3} P_{14} + \frac{1}{24} P_{16}$$

$$b_8 = - \frac{5}{2} P_2 + \frac{8}{3} P_4 - \frac{1}{6} P_6 - \frac{5}{4} P_{11} + \frac{4}{3} P_{13} - \frac{1}{12} P_{15}$$

$$b_9 = \frac{33}{32} P_1 - \frac{8}{9} P_3 - \frac{41}{288} P_5 + \frac{2}{3} P_7 + \frac{1}{32}(P_9 + P_{12})$$
$$- \frac{1}{24} P_{14} + \frac{1}{96} P_{16}$$

$$b_{10} = - \frac{35}{16} P_2 + \frac{35}{18} P_4 + \frac{35}{144} P_6 - \frac{4}{3} P_8 - \frac{1}{16}(P_{10} + P_{11})$$
$$+ \frac{1}{12} P_{13} - \frac{1}{48} P_{15}$$

$$b_{11} = - \frac{1}{8} P_{12} + \frac{1}{6} P_{14} - \frac{1}{24} P_{16}$$

$$b_{12} = \frac{1}{2} P_2 - \frac{2}{3} P_4 + \frac{1}{6} P_6 + \frac{1}{4} P_{11} - \frac{1}{3} P_{13} + \frac{1}{12} P_{15}$$

$$b_{13} = - \frac{5}{16} P_1 + \frac{2}{9} P_3 + \frac{13}{144} P_5 - \frac{1}{4} P_7 - \frac{1}{48} P_9$$

$$b_{14} = \frac{5}{8} P_2 - \frac{4}{9} P_4 - \frac{13}{72} P_6 + \frac{1}{2} P_8 + \frac{1}{24} P_{10}$$

$$b_{15} = \frac{1}{32} P_1 - \frac{1}{54} P_3 - \frac{11}{864} P_5 + \frac{1}{36} P_7 + \frac{1}{288} P_9$$

$$b_{16} = - \frac{1}{16} P_2 + \frac{1}{27} P_4 + \frac{11}{432} P_6 - \frac{1}{18} P_8 - \frac{1}{144} P_{10} \quad .$$

Die P_i sind wieder durch (II - 4) definiert.

Lebenslauf

15.2.1947	geboren in Reutlingen. Eltern: Eugen Kern, Landwirt Elsa Kern geb. Schenk
1953-1957	Besuch der Volksschule in Rommelsbach Kreis Reutlingen.
1957-1966	Besuch des Johannes-Kepler-Gymnasiums in Reutlingen.
16.3.1966	Reifeprüfung am Johannes-Kepler-Gymnasium in Reutlingen.
1966-1970	Studium der Physik an der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen.
24.11.1970	Diplom-Hauptprüfung. Die Diplomarbeit unter Anleitung von Prof. Dr. F. Lenz am Lehrstuhl für Theoretische Elektronenphysik der Universität Tübingen hatte das Thema: „Rechnerische Untersuchungen an einem Elektronenstrahlerzeugungssystem mit Magnetlinse".
seit 1971	Verwalter der Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten bzw. wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Theoretische Elektronenphysik der Universität Tübingen, Wahrnehmung von Lehraufträgen für Übungen zur Theoretischen Mechanik, für einen Vorsemesterkurs „Mathematische Hilfsmittel für Physikstudenten" und für Programmierkurse, Mitarbeit an Forschungsprojekten des Lehrstuhls für Theoretische Elektronenphysik und des Instituts für Angewandte Physik.
1974-1977	Arbeit an der Dissertation „Theoretische Untersuchungen an rotationssymmetrischen Strahlerzeugungssystemen mit Feldemissionsquelle" unter Anleitung von Prof. Dr. F. Lenz am Lehrstuhl für Theoretische Elektronenphysik der Universität Tübingen.
2.9.1976	Eheschließung mit Anna Elisabeth geb. Meinhof.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten:

M. Auwärter, A. Bartl, M. Baumann, W. Braunbek,
G. Elwert, K.-H. Gaukler, D. Höhn, C. Jönsson,
E. Kasper, H. Krüger, F. Lenz, G. Mack,
H. Mitter, G. Möllenstedt, R. Mühleisen, (Physik)
H. Pfister, R. Schief, E. Schmid, H. Seiler,
J. Sommer, R. Speidel, H. Stumpf, F. Wahl,
H. Wittern, G. Wolf,

G. Betsch, K.-P. Hadeler, M. Reimer,
H.H. Schaefer, H. Wielandt, A. Wolf, (Mathematik)
K. Zeller,

W. Bues, E. Müller, W. Rüdorff. (Chemie)